準線形環境におけるメカニズムデザイン

坂井豊貴

平成 25 年 9 月 2 日

まえがき

メカニズムデザインは急速に進む実用化と,「制度を設計する」というアプローチの面白さから，近年，研究者のみならず実務家からも大きな注目を集めている．特に 2007 年にこの分野についてノーベル経済学賞が出され，また 2012 年に派生分野と言ってよいであろうマーケットデザインに同賞が再度出されて以来，社会的な関心の高まりが著しい．

私自身はこれまでメカニズムデザインの研究を行うとともに，学生や一般向けの書籍を刊行したり，大学の授業で教えたりしてきた．しかしメカニズムデザインは必ずしも学びやすい，あるいは教えやすい学問分野ではない．習得には一定の数学的操作に慣れることと，独特の思考様式を獲得することがともに求められる．

なかでも，広範な応用例を含む準線形環境において中心的な役割を果たすグローヴスメカニズムに親しむことは，初学者には（おそらく専門家にも）決して容易ではない．あの定義が何を言っているのかよく分からない，なぜあのような定義でなければならないのか必然性が見えてこない，グローヴスメカニズムを見ると微妙にフラストレーションを感じる．

私にとってグローヴスメカニズムはそのような，どうも付き合いに

くい，敬して遠ざけるような存在であった．おそらく同様の感覚を持たれる方も多いのではないか．であれば本書はそのような人々のフラストレーションを軽減するか，できれば全面的に解消したい．

グローヴスメカニズムを学ぶルートは主にふたつある．ひとつはオークションや公共財供給などの諸環境で，第二価格オークションやクラークメカニズムなどグローヴスメカニズムの特殊例から学び，次いで一般的な環境へ進むやり方だ．もうひとつの学び方は，最初から一般的な環境でグローヴスメカニズムをひとまず理解して，そこから諸環境に進むやり方である．普通なら特殊から一般へという前者のほうが学びやすい．

しかし私はグローヴスメカニズムについては必ずしもそうではないと考えている．経済学にある程度慣れている人にとっては後者，すなわち一般から特殊へと進む方がラクに学べるのではないか．

グローヴスメカニズムの最大の特徴は耐戦略性を満たすことだ．この証明はごく簡単にできる．なぜならグローヴスメカニズムは「耐戦略性を満たすためにはメカニズムはどのような形状をしていればよいか」という問いから逆算して作られているからだ．だからグローヴスメカニズムの定義をなぞればそのまま耐戦略性が出てくる．最初にグローヴスメカニズムが耐戦略性を満たすことの証明を見たときに，少なからぬ人が狐につままれたような気がするのはこのためである．

第二価格オークションやクラークメカニズムはグローヴスメカニズムの特殊例なので，その分，具体性が高く理解しやすいはずだ．しかしこれらが耐戦略性を満たすことを証明するのは案外と手間がかかる．特にクラークメカニズムは最悪で，授業中にこのメカニズムが耐戦略性を満たすことを示そうとするならば，証明の中盤には大半の学生の

目が虚ろになっている．教える側としてもその様を見ながら板書を進めるのはなかなか心折れるものだ．なんせ全体で一時間近くかかるし，そもそも自分でも証明していてあまり面白くない．つまり私や学生が悪いのではなく証明が悪い．

そういうわけで本書では潔く一般的な環境でグローヴスメカニズムの解説を丁寧に行う．そしてそれが特殊例とどう関係しているのか論じる．更にはグローヴスメカニズムが利用できないケースでどうメカニズムデザインを行うかについて一定の指針を与えていく．より詳しくは以下の通りである．

第1章では一般的な準線形環境でグローヴスメカニズムの定義を導出する．定義を導出するとはつまり，なぜ耐戦略性を満たすメカニズムがあのような形状をする必要があるのか順を追い説明することである．そして公共財供給やオークションなど諸環境を特定化して，そこでのグローヴスメカニズムの特殊例について述べる．ピボタルメカニズムはとりわけ重要な例であり，これは今日脚光を浴びる VCG オークションの一般形にあたる．

第2章ではグローヴスメカニズムが一定の条件下で効率性と耐戦略性を満たす唯一のメカニズムのクラスであるという公理的特徴付けを与える．これは Holmström (1979) の結果を使いやすいよう弱めて記したものだ．ホルムストロームの結果はこれより一般性が高いが，一般性を高めるとどうしても理解が難しくなるゆえ，この程度でよいと私は考えている．

第3章では私が考案したごみ処分場立地問題を紹介する (Sakai 2012)．ここでは予算バランスの観点からグローヴスメカニズムを用いることができず，またどのような常識的なメカニズムを用いても戦略的に操

作されてしまう．そこで公正価格ルールという新たな仕組みを導入する．このルールは戦略的に操作されてしまうが，されたところで結果があまり歪まず正しくコア配分を選べるという性質を持っている．これはグローヴスメカニズムが使えないときには戦略的操作の影響が軽微なものを使えばよいという視点を与えるものだ．

第 4 章では公平分担問題という，やはり予算バランスの尊重が大切な準線形環境を扱う．ここでもグローヴスメカニズムは活用できない．そこで人々が戦略的にゲームをプレイして，その結果として望ましい配分が実現するような，ゲームのルールを設計していく．これは専門的にはナッシュ遂行と呼ばれるメカニズムの設計方針である．ナッシュ遂行は一般性の高いモデルで抽象的な議論がなされることが多いが，この章では単純なモデルで具体性の高い議論を展開する．

本書はサーヴェイを全く意図していない．これについては坂井・藤中・若山 (2008) のほか，適宜サーヴェイ文献として引用したものを参照されたい．なお，読者には，論理記号の操作と初歩的な解析学，および初歩的なゲーム理論についての知識を有することを前提としている．

目 次

まえがき i

第1章 耐戦略性とグローヴスメカニズム 1

1.1 はじめに 1

1.2 準線形環境 2

1.3 グローヴスメカニズム 8

1.4 ピボタルメカニズム 12

1.5 応用例 14

1.5.1 二択の選択 14

1.5.2 公共財供給 19

1.5.3 単一財オークション 22

1.5.4 組み合わせオークション 24

1.6 おわりに 25

第2章 公理的特徴付け 27

2.1 はじめに 27

2.2 耐戦略性は t をどう制約するのか 28

2.3 最大化問題による接近 30

2.4 ホルムストロームの公理化 32

2.5　おわりに 39

第 3 章　ごみ処分場立地問題と戦略的操作の許容 41

3.1　はじめに 41
3.2　ごみ処分場立地問題 42
3.3　不可能性定理 44
3.4　可能性定理 45
3.5　定理 7 の証明 50
3.6　おわりに 57

第 4 章　公平分担問題とナッシュ遂行 59

4.1　はじめに 59
4.2　公平分担問題 60
4.3　ナッシュ遂行メカニズム 63
4.4　おわりに 68

あとがき 69

引用文献 71

索引 75

第1章　耐戦略性とグローヴスメカニズム

1.1　はじめに

人々が集団で政治や経済に関わる集合的意思決定を行うとき，誰がどの選択肢をどの程度評価するかという選好に関わる情報は，一般には私的情報である．そして問題の中立的な仲裁者として適切な決定を行おうとするならば，正しい情報があったほうがよい．よってその情報を集めたいわけだが，直接人々に聞いたところで彼らが正直に教えてくれるとは限らない．それが得策とは限らないからだ．そこでどうにか工夫を凝らして正しい情報を集められないか．これが今日メカニズムデザインと分類される学問領域の主たる関心事項のひとつである．

そこで誰にとっても正直に自身の選好を表明することが，常に得策になっているような仕組み，メカニズムを作ることができるだろうか．メカニズムのその性質を耐戦略性というが，一般に耐戦略性を満たすメカニズムを設計することは容易でなく環境によっては存在しないか，存在してもかなり限定されたクラスのメカニズムしかそれを満たさない．しかし存在する場合には実用性が高く，実用されないにしても他のメカニズムとの比較の参照点として重要な役割を果たすことが多い．

金銭移転が可能で，かつ人々の選好が金銭について準線形である経済モデルを総称して準線形環境という．準線形性は強い仮定ではあるが，この環境は公共財供給や政治的選択やオークションなど多くの応用モデルを含んでおり汎用性は高い．1960 年代に耐戦略性の概念が学界で自然発生的に誕生して以降，1970 年代に入ってからは準線形環境で耐戦略性を満たすメカニズムやメカニズムのクラスがいくつか発見されてきた[1]．特に注目すべきなのが Groves (1973) により定式化され Groves and Loeb (1975) によりその耐戦略性が明らかにされた，グローヴスメカニズムと呼ばれるメカニズムのクラスである．Vickrey (1961) により最初にゲーム理論的な分析が与えられた第二価格オークションや，Clarke (1971) により導入されたクラークメカニズムという公共財供給メカニズムは，いずれもグローヴスメカニズムの一種である．

本章では一般的な準線形環境を定式化して，そこでメカニズムがどのような形状をしていれば耐戦略性を満たせるかという問いを考えながら，グローヴスメカニズムの定義の本質に接近していく．そして二択問題，公共財供給，単一財オークション，組み合わせオークションといった応用例で，ピボタルメカニズムやクラークメカニズムなどの重要なメカニズムの例を紹介する．

1.2　準線形環境

有限人の個人からなる集合を $I \equiv \{1, 2, \ldots, n\}$ で表す．選択肢の集合を A で表す．

[1]サーヴェイとして Jackson (2000) をあげておく．

個人 $i \in I$ が選択肢 $a \in A$ に対し持つ金銭換算価値である，**評価値**を

$$v_i(a) \in \mathbb{R}$$

で表す．そして $v : A \to \mathbb{R}$ を**評価関数**と呼ぶ．評価関数全体からなる集合を $\mathbb{R}^A$ で表す．個人 i の**ドメイン**とは非空集合 $V_i \subseteq \mathbb{R}^A$ のことである．

ここでは A や V_i など抽象性の高い定義を行っているが，次節ではそれらの具体例をいくつか与える．

評価関数プロファイルとその集合を

$$v = (v_i)_{i \in I} \in V = \times_{i \in I} V_i$$

で表す．同様に，ひとりの i を除く評価関数プロファイルとその集合を

$$v_{-i} = (v_j)_{j \neq i} \in V_{-i} = \times_{j \neq i} V_j$$

で表す．念のため，$v = (v_i, v_{-i}) \in V_i \times V_{-i} = V$ である．

各 $t_i \in \mathbb{R}$ により i の金銭移転額を表す．もし $t_i \geq 0$ ならば i はお金を受け取り，逆に $t_i \leq 0$ ならば支払うことを意味する．個人 $i \in I$ は選択肢と金銭移転額の集合 $A \times \mathbb{R}$ の上に選好を持っており，それは準線形関数

$$U(a, t_i; v_i) = v_i(a) + t_i \quad \forall (a, t_i) \in A \times \mathbb{R}$$

により表現される．

決定関数を $d : V \to A$ により定める．この関数は各 $v \in V$ に対しそのもとで採用する選択肢 $d(v) \in V$ を選び取るものだ．**金銭移転関**

数を $t : V \to \mathbb{R}^I$ により定める．この関数は各 $v \in V$ に対して，それぞれの個人へ金銭移転額を

$$t(v) = (t_1(v), t_2(v), \ldots, t_n(v)) \in \mathbb{R}^I$$

として定めるものだ．決定関数 d と金銭移転関数 t のペア

$$(d, t)$$

のことを**（直接）メカニズム**と呼ぼう．

ここでメカニズムに満たしてほしい配分上の条件を定めよう．メカニズム (d, t) が**パレート効率的**であるとは任意の $v \in V$ に対して，どのような

$$(a, m_1, m_2, \ldots, m_n) \in A \times \mathbb{R}^I$$

も条件群

$$\sum_{i \in I} m_i = \sum_{i \in I} t_i(v) \tag{1.1}$$

$$U(a, m_i; v_i) \geq U(d(v), t_i(v); v_i) \quad \forall i \in I \tag{1.2}$$

$$U(a, m_j; v_j) > U(d(v), t_j(v); v_j) \quad \exists j \in I \tag{1.3}$$

をすべて同時には満たせないことである．パレート効率的なメカニズムのもとでは，いったん決まった結果 $(d(v), t(v))$ に対し，何か別の選択肢 a と個人間での金銭移転 $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ によって (1.1)，どの i にも損をさせることなく (1.2)，誰か j に得をさせること (1.3) ができない．

パレート効率性はメカニズム (d, t) に対し定義したが，次の補題は，この条件が実は d の性質のみに依存することを示している．

補題 1. メカニズム (d,t) がパレート効率的であることと，条件

$$\sum_{i\in I} v_i(d(v)) = \max_{a\in A}\sum_{i\in I} v_i(a) \quad \forall v \in V \tag{1.4}$$

が成り立つことは同値である．

証明. まず (d,t) がパレート効率的であるとしよう．任意の $v \in V$ について考える．背理法により矛盾を導くため，ある $a \in A$ が存在して

$$\sum_{i\in I} v_i(d(v)) < \sum_{i\in I} v_i(a)$$

だとしよう．このとき $\varepsilon > 0$ を

$$\sum_{i\in I} v_i(d(v)) + n\varepsilon = \sum_{i\in I} v_i(a) \tag{1.5}$$

を満たす実数とする．そして任意の $i \in I$ について

$$m_i = v_i(d(v)) + t_i(v) - v_i(a) + \varepsilon$$

と置く．すると

$$\begin{aligned} v_i(a) + m_i &= v_i(a) + v_i(d(v)) + t_i(v) - v_i(a) + \varepsilon \\ &= v_i(d(v)) + t_i(v) + \varepsilon \\ &> v_i(d(v)) + t_i(v) \quad \forall i \in I \end{aligned}$$

が成り立ち，また (1.5) より

$$\sum_{i\in I} m_i = \sum_{i\in I}(v_i(d(v)) + t_i(v) - v_i(a) + \varepsilon) = \sum_{i\in I} t_i(v)$$

なのでパレート効率性に矛盾である．

　いま逆に (1.4) が成り立つとしよう．そして任意の $v \in V$ について考える．また

$$(a, m_1, m_2, \ldots, m_n) \in A \times \mathbb{R}^I$$

は (1.1) と (1.2) に該当する条件

$$\sum_{i \in I} m_i = \sum_{i \in I} t_i(v) \tag{1.6}$$

$$U(a, m_i; v_i) \geq U(d(v), t_i(v); v_i) \quad \forall i \in I \tag{1.7}$$

をともに満たすものとする．すると (1.7) から

$$\begin{aligned}\sum_{i \in I}(v_i(a) + m_i) &= \sum_{i \in I} U(a, m_i; v_i) \\ &\geq \sum_{i \in I} U(d(v), t_i(v); v_i) \\ &= \sum_{i \in I}(v_i(d(v)) + t_i(v))\end{aligned}$$

が成り立ち，(1.6) と (1.4) から

$$\sum_{i \in I} v_i(a) \geq \sum_{i \in I} v_i(d(v)) \geq \sum_{i \in I} v_i(a)$$

が従うので

$$\sum_{i \in I} v_i(a) = \sum_{i \in I} v_i(d(v)) \tag{1.8}$$

となる．

よって (1.6) と (1.8) から

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I} U(a, m_i; v_i) &= \sum_{i\in I}(v_i(a) + m_i)\\ &= \sum_{i\in I}(v_i(d(v)) + t_i(v))\\ &= \sum_{i\in I} U(d(v), t_i; v_i)\end{aligned}$$

が成り立ち，(1.7) から

$$U(a, m_i; v_i) = U(d(v), t_i(v); v_i) \quad \forall i \in I$$

が得られるので (1.3) は成り立たない．つまり (d, t) はパレート効率性を満たす．　□

補題 1 は初学者には一見難しく見えるかもしれないが，選好の準線形性から自然に従う結果である．この補題はきわめて強力で，メカニズムのパレート効率性を確認するためには，d だけに着目してよいということになる．そこでこの補題によりパレート効率性と同値と示された，次の条件を定めよう．決定関数 d が**（決定）効率性**を満たすとは条件

$$\sum_{i\in I} v_i(d(v)) = \max_{a\in A} \sum_{i\in I} v_i(a) \quad \forall v \in V \tag{1.9}$$

が成り立つことである．本来は決定効率性のように呼ぶべきだが，短縮のため今後は単に d の効率性という．そして以後の議論では，d を効率的な決定関数としてひとつ固定する．これでパレート効率性を満たすという目標は実現したことになる．問題はどのような t と組み合

わせるかである．なお，準線形性環境を扱うメカニズムデザインの文献では，最初から d だけを用い (1.9) により効率性を定めることが多い．しかしその定義自体は単なる数学的な最大化の要求に過ぎず，それが規範的な意味を持つのは，補題 1 がパレート効率性との同値性を保証してくれているからだ．

さて，メカニズム (d,t) のもとで個人 $i \in I$ が，$v_i \in V_i$ が彼の真の評価関数であるとして，他の人々が $v_{-i} \in V_{-i}$ を表明したときに，もし $v_i' \in V_i$ を表明したならばそのときの準線形効用は

$$U(d(v_i', v_{-i}), t_i(v_i', v_{-i}); v_i) = v_i(d(v_i', v_{-i})) + t_i(v_i', v_{-i})$$

である．もちろん $v_i' = v_i$ であっても構わない．これから，誰にとっても，常に正直に評価関数を表明することが弱支配戦略になっているという誘因両立性の条件を定めよう．メカニズム (d,t) が**耐戦略性**を満たすとは，任意の $i \in I$，任意の $v_i \in V_i$，任意の $v_{-i} \in V_{-i}$，任意の $v_i' \in V_i$ について

$$U(d(v_i, v_{-i}), t_i(v_i, v_{-i}); v_i) \geq U(d(v_i', v_{-i}), t_i(v_i', v_{-i}); v_i)$$

が成り立つことである．いったい t がどのような形状をしていれば (d,t) は耐戦略性を満たすのだろうか．

1.3　グローヴスメカニズム

そもそも d は効率性を満たすので，その性質を援用して (d,t) の耐戦略性を獲得できないだろうか．これは突飛なアイデアに思えるかもしれないが，難問の突破口として検討に値することだ．

いま任意の個人 $i \in I$ について考える．そこで t が次のようであるとしよう．

$$t_i(v) = \sum_{j \neq i} v_j(d(v)) \quad \forall v \in V$$

このとき任意の $v \in V$ について，効率性から

$$\begin{aligned} U(d(v), t_i(v); v_i) &= v_i(d(v)) + \underbrace{\sum_{j \neq i} v_j(d(v))}_{=t_i(v)} \\ &= \sum_{j \in I} v_j(d(v)) \\ &= \max_{a \in A} \sum_{j \in I} v_j(a) \end{aligned} \tag{1.10}$$

が成り立つ．

一方で任意の $b_i \in V_i$ と任意の $v_{-i} \in V_{-i}$ について

$$\begin{aligned} U(d(b_i, v_{-i}), t_i(b_i, v_{-i}); v_i) &= v_i(d(b_i, v_{-i})) + \underbrace{\sum_{j \neq i} v_j(d(b_i, v_{-i}))}_{=t_i(b_i, v_{-i})} \\ &= \sum_{j \in I} v_j(d(b_i, v_{-i})) \\ &\leq \max_{a \in A} \sum_{j \in I} v_j(a) \end{aligned} \tag{1.11}$$

が成り立つ．

よって (1.10) と (1.11) から

$$U(d(v), t_i(v); v_i) \geq U(d(b_i, v_{-i}), t_i(b_i, v_{-i}); v_i)$$

が直ちに従う．このことは (d,t) が耐戦略性を満たすことを意味する．

　つまり，もし t が

$$t_i(v) = \sum_{j \neq i} v_j(d(v)) \quad \forall v \in V$$

であれば，(d,t) は耐戦略性を満たすわけだ．そこで次に，何でもよいので定数 $H \in \mathbb{R}$ について，t が

$$t_i(v) = \sum_{j \neq i} v_j(d(v)) + H \quad \forall v \in V$$

であればどうだろうかというと，やはりそのときも (d,t) は耐戦略性を満たす．なぜならそのとき

$$\begin{aligned} U(d(v), t_i(v); v_i) &= \max_{a \in A} \sum_{j \in I} v_j(a) + H \\ &\geq \sum_{j \in I} v_j(d(b_i, v_{-i})) + H \\ &= U(d(b_i, v_{-i}), t_i(b_i, v_{-i}); v_i) \end{aligned}$$

が成り立つからだ．大小比較の両辺に同じ値を足しても大小関係は変わらない．当たり前のことだ．

　そこで更に一歩進めて，各 $v_{-i} \in V_{-i}$ について定数 $h_i(v_{-i})$ を何でもよいので定めて，いま t が

$$t_i(v) = \sum_{j \neq i} v_j(d(v)) + h_i(v_{-i}) \quad \forall v \in V \tag{1.12}$$

であればどうかというと，やはり

$$
\begin{aligned}
U(d(v), t_i(v); v_i) &= v_i(d(v)) + \underbrace{\sum_{j\neq i} v_j(d(v)) + h_i(v_{-i})}_{=t_i(v)} \\
&= \max_{a\in A} \sum_{j\in I} v_j(a) + h_i(v_{-i}) \\
&\geq \sum_{j\in I} v_j(d(b_i, v_{-i})) + h_i(v_{-i}) \\
&= v_i(d(b_i, v_{-i})) + \underbrace{\sum_{j\neq i} v_j(d(b_i, v_{-i})) + h_i(v_{-i})}_{=t_i(b_i, v_{-i})} \\
&= U(d(b_i, v_{-i}), t_i(b_i, v_{-i}); v_i)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．すなわち t が (1.12) のような形状をしている限り耐戦略性は成り立つことが分かる．効率性を援用して耐戦略性を充足させたわけだ．

ここでグローヴスメカニズムの定義を公式に与えよう．メカニズム (d, t) が**グローヴスメカニズム**であるとは，d が効率的であり，また任意の $i \in I$ について，ある関数 $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ が存在して

$$
t_i(v) = \sum_{j\neq i} v_j(d(v)) + h_i(v_{-i}) \quad \forall v \in V \tag{1.13}
$$

を満たすことである．なお h_i の作り方は無数にあるのでグローヴスメカニズムも無数に存在する．しかしそれらはいずれも (1.13) の形状を共有するという意味で似通っており，また耐戦略性以外の何か他の条件などを追加的に求めると，それらのうちごくわずかしかその条件を満たさないということが多い．

本節の議論はグローヴスメカニズムが耐戦略性を満たすことの証明になっている[2]．定義上，グローヴスメカニズムが効率性を満たすのは当然である．以上のことを定理として述べておこう．

定理 1. あらゆるグローヴスメカニズムは効率性と耐戦略性を満たす．

1.4　ピボタルメカニズム

様々なグローヴスメカニズムの中から目ぼしいものを見付けるために h_i の形状について議論しよう．まず第 1.3 節では議論を開始するにあたり

$$t_i(v) = \sum_{j \neq i} v_j(d(v)) \quad \forall v \in V \tag{1.14}$$

[2]誰が最初にグローヴスメカニズムが耐戦略性を満たすと示したのか，言い切ることは難しい．Groves (1973) 自身は耐戦略性よりかなり込み入った議論を行っており，耐戦略性を扱っているとは言い難い．Groves and Loeb (1975) はその第 2.4 節で実質的にグローヴスメカニズムが耐戦略性を満たすことを示してはいる．しかし彼らのモデルは公共財生産を企業間で分担する問題を扱っており，例えばグローヴスメカニズムの重要な応用先であるオークションを扱うという視点が全く無い．ただし Green and Laffont (1977) は，Groves and Loeb (1975) が最初にグローヴスメカニズムが耐戦略性を満たすことを示した，というような記述をしている．しかし公共財やオークションを扱える準線形環境で，そのことを最初に定理として厳密に記述し示したのは Green and Laffont (1977) である．これは単に「誰が先に書いた」という問題ではなく,「誰が最初に準線形環境で一般的にグローヴスメカニズムというものの重要性を認め，耐戦略性という当時は必ずしも確立していなかった観点からグローヴスメカニズムを理解したか」という問題である．

と置き，そうすると (d,t) が耐戦略性を満たすことを確認していた．そしてその後

$$t_i(v) = \sum_{j \neq i} v_j(d(v)) + h_i(v_{-i}) \quad \forall v \in V \tag{1.15}$$

と置いてもやはり (d,t) が耐戦略性を満たすことを確認したのであった．

そこで問うのだが，(1.14) をそのまま使えばよいのではないだろうか．こうするとメカニズムは効率性と耐戦略性を満たすからよいではないか．しかしそうはいかない．多くのケースでは $\sum_{j\neq i} v_j(d(v)) > 0$ が頻繁に成り立つ．いわば i ひとり程度を除いても他者の便益の和が正になるのだ．特に d は効率的なのでそのような「良い」選択肢を選びやすい．とするともし t が (1.14) のようであると $t_i(v) > 0$ になってしまう．これは i がお金を受け取ることを意味する．ということは人々はお金を受け取るので，メカニズムの運営者側は d で「良い」選択肢を選んだうえで，t で皆にお金をあげることになる．これは予算的に現実的ではない．そこで h_i が何かマイナスの値を取るよう調整して $t_i(v)$ や $\sum_{j\in I} t_j(v)$ などがプラスにならないよう試みたい．

そこで任意の $i \in I$ について

$$h_i(v_{-i}) = -\max_{a\in A} \sum_{j\neq i} v_j(a) \quad \forall v_{-i} \in V_{-i}$$

と定めてみると

$$t_i(v) = \sum_{j\neq i} v_j(d(v)) - \max_{a\in A} \sum_{j\neq i} v_j(a) \quad \forall \in V$$

になっている．いま

$$\sum_{j\neq i} v_j(d(v)) \leq \max_{a\in A} \sum_{j\neq i} v_j(a) \quad \forall v \in V$$

が成り立つので $t_i(v)$ は必ずゼロ以下の値である．つまり i はお金を受け取るのではなく支払っている．こうして定義されたメカニズム (d,t) を**ピボタルメカニズム**という (Clarke 1971).

メカニズム (d,t) が**予算実行可能性**を満たすとは

$$\sum_{i\in I} t_i(v) \leq 0 \quad \forall v \in V$$

が成り立つことである．当然ながらピボタルメカニズムはこの条件を満たす．ピボタルメカニズムに関する事項を次の命題にまとめておこう．

命題 1. ピボタルメカニズムは効率性，耐戦略性，予算実行可能性を満たす．

1.5　応用例

1.5.1　二択の選択

二択の選択問題を考える．選択肢の集合が $A=\{a,b\}$ で，a と b はそれぞれ別の政策を表す．各個人のドメインは

$$V_i = \mathbb{R}^A \quad \forall i \in I$$

とする．

ピボタルメカニズムのもとで各人はお金を支払うわけだが，それが払わせすぎていないことを次の定理は保証している．

定理 2. 二択の選択問題を考え，(d,t) をピボタルメカニズムとする．このとき任意の $v \in V$ と任意の $i \in I$ について，もし $v_i(a) \geq v_i(b)$ ならば

$$U(d(v), t_i(v); v_i) \geq U(b, 0; v_i)$$

が成り立つ．

つまりピボタルメカニズムのもとでは，a を b 以上に好む個人にとって,「選択が b で支払いはゼロ」という結果より悪くなることはない (a と b の役割を逆にしても同様)．この意味で個人はお金を支払い過ぎてはいない．ピボタルメカニズムのこの性質を**厚生下限性**という (Moulin 1986)．

証明. いま (d,t) をピボタルメカニズムとする．任意の $v \in V$ と任意の $i \in I$ について考え，$v_i(a) \geq v_i(b)$ とする．

ケース 1（$d(v) = a$） このとき効率性から

$$\sum_{j \in I} v_j(a) \geq \sum_{j \in I} v_j(b) \tag{1.16}$$

である．

もし

$$\sum_{j \neq i} v_j(a) \geq \sum_{j \neq i} v_j(b)$$

ならば，ピボタルメカニズムの定義より $h_i(v_{-i}) = -\sum_{j \neq i} v_j(a)$ が成り立ち

$$t_i(v) = \sum_{j \neq i} v_j(a) - \sum_{j \neq i} v_j(a) = 0$$

が従い

$$U(d(v), t_i(v); v_i) = v_i(a) + 0 \geq v_i(b) + 0 = U(b, 0; v_i)$$

が得られる．

　もし

$$\sum_{j \neq i} v_j(a) < \sum_{j \neq i} v_j(b)$$

ならば，$h_i(v_{-i}) = -\sum_{j \neq i} v_j(b)$ が成り立つので

$$U(d(v), t_i(v); v_i) = v_i(a) + \sum_{j \neq i} v_j(a) - \sum_{j \neq i} v_j(b)$$

が得られ，(1.16) が

$$v_i(a) + \sum_{j \neq i} v_j(a) - \sum_{j \neq i} v_j(b) \geq v_i(b)$$

を含意することに注意すると

$$\begin{aligned} U(d(v), t_i(v); v_i) &= v_i(a) + \sum_{j \neq i} v_j(a) - \sum_{j \neq i} v_j(b) \\ &\geq v_i(b) = U(b, 0; v_i) \end{aligned}$$

が得られる．

　ケース 2（$\boldsymbol{d(v) = b}$） このとき効率性から

$$\sum_{j \in I} v_j(b) \geq \sum_{j \in I} v_j(a)$$

が従う．

もし

$$\sum_{j \neq i} v_j(b) < \sum_{j \neq i} v_j(a)$$

ならば $v_i(b) > v_i(a)$ となり前提の $v_i(b) \leq v_i(a)$ に矛盾なので，いま

$$\sum_{j \neq i} v_j(b) \geq \sum_{j \neq i} v_j(a)$$

が成り立っている．すると $h_i(v_{-i}) = -\sum_{j \neq i} v_j(b)$ であるゆえ

$$t_i(v) = \sum_{j \neq i} v_j(b) - \sum_{j \neq i} v_j(b) = 0$$

となり，よって

$$(d(v), t_i(v)) = (b, 0)$$

が得られ

$$U(d(v), t_i(v); v_i) = U(b, 0; v_i)$$

が従う．

□

ピボタルメカニズムは予算実行可能性を満たすが，皆がゼロ以上の支払いをするので，集めたお金が余ってしまうことになる．そして余ったお金を人々に返還することをメカニズムの定義に組み入れると，t の形状が変わってしまい耐戦略性が満たされなくなってしまう．

ではグローヴスメカニズムの中にそのような余りが出ないメカニズムはあるのだろうか．メカニズム (d, t) が**予算バランス**を満たすとは

$$\sum_{i \in I} t_i(v) = 0 \quad \forall v \in I$$

が成り立つことである．実はグローヴスメカニズムにこの条件を満たすものは多くの環境で存在しない (Green and Laffont, 1979; Rob, 1982)[3]．以下ではその簡単な証明を与えておく[4]．

定理 3. 二択の選択問題において予算バランスを満たすグローヴスメカニズムは存在しない．

証明. いま簡単なケースとして $I = \{1, 2\}$ のときを考え，(d, t) を任意のグローヴスメカニズムとする．ここで評価関数 $v_1, v_1' \in V_1$ と $v_2, v_2' \in V_2$ をそれぞれ

$$
\begin{aligned}
v_1(a) &= 4,\ v_1(b) = 0 \\
v_1'(a) &= 2,\ v_1'(b) = 0 \\
v_2(a) &= 0,\ v_2(b) = 1 \\
v_2'(a) &= 0,\ v_2'(b) = 3
\end{aligned}
$$

により定める．効率性より

$$
\begin{aligned}
& d(v_1, v_2) = d(v_1', v_2) = d(v_1, v_2') = a \\
& d(v_1', v_2') = b
\end{aligned}
$$

である．

もし (d, t) が予算バランスを満たすならば

$$
\begin{aligned}
0 &= t_1(v) + t_2(v) \\
&= h_1(v_2) + v_2(d(v)) + h_2(v_1) + v_1(d(v))
\end{aligned}
$$

[3] きわめて例外的に，Suijs (1996) は選好が線形な順番待ち問題で予算バランスを満たすグローヴスメカニズムが存在することを示している．

[4] この証明は，Jackson (2000) の証明を簡素化した坂井・藤中・若山 (2008) に基づく．

が成り立つ．すると

$$h_1(v_2) + h_2(v_1) = -\bigl(v_1(d(v)) + v_2(d(v))\bigr)$$

であるが，このとき

$$\begin{aligned}
0 =& \bigl(h_1(v_2) - h_1(v_2)\bigr) + \bigl(h_2(v_1) - h_2(v_1)\bigr) \\
&+ \bigl(h_1(v_2') - h_1(v_2')\bigr) + \bigl(h_2(v_1') - h_2(v_1')\bigr) \\
=& \bigl(h_1(v_2) + h_2(v_1)\bigr) - \bigl(h_1(v_2) + h_2(v_1')\bigr) \\
&- \bigl(h_1(v_2') + h_2(v_1)\bigr) + \bigl(h_1(v_2') + h_2(v_1')\bigr) \\
=& (-4) - (-2) - (-4) + (-3) = -1
\end{aligned}$$

となり矛盾である．つまり (d, t) は予算バランスを満たさない． □

1.5.2 公共財供給

有限個ある政策の集合 A の中からひとつの政策を選ぶ問題を考える．ただし各 $a \in A$ の施行には費用 $c(a) \geq 0$ がかかる．例えば a は公共財の供給水準であり，$c(a)$ はそれに要する費用である．

個人 n を，人間ではなくて，こういった費用の条件を表すものとしよう．技術的にはこれは

$$v_n(a) = -c(a) \quad \forall a \in A$$

として，この「個人」n のドメインを

$$V_n = \{v_n\}$$

とすればよい．つまり V_n は費用関数を表す v_n ただひとつしか含まない．耐戦略性についていえば，そもそも V_n にはひとつしか関数が入っていないので，この「個人」n について耐戦略性は意味のない条件である．

一方で個人 $i = 1, \ldots, n-1$ は「個人」のままである．彼らのドメインは

$$V_i = \mathbb{R}^A$$

とする．つまり各政策にはどのような評価も行いうる．

ここで各 $i \neq n$ について $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ を

$$h_i(v_{-i}) = -\max_{a \in A}\Big(\sum_{j \neq i,n} v_j(a) + \frac{n-2}{n-1} v_n(a)\Big) \;\; \forall v_{-i} \in V_{-i}$$

により定義し，また $h_n : V_{-n} \to \mathbb{R}$ を

$$h_n(v_{-n}) = -\sum_{j \neq n} v_j(d(v_{-n}, v_n)) \;\; \forall v_{-n} \in V_{-n}$$

と定義する．こうして定められたメカニズム (d, t) を**クラークメカニズム**という (Clarke 1971)．

まず

$$t_n(v) = \sum_{j \neq n} v_j(d(v_{-n}, v_n)) - h_n(v_{-n}) = 0 \;\; \forall v \in V$$

が成り立つことに注意されたい．つまり「非個人」である n の金銭移転はきちんとゼロになるよう定められている．問題は「個人たち」の金銭移転の総和が費用をカバーするよう集められているかだが，次の命題はそれが成り立つことを保証している．

命題 2. クラークメカニズム (d,t) は効率性と耐戦略性を満たし，かつ費用の徴収条件

$$\sum_{i\neq n} t_i(v) \leq -c(d(v)) \quad \forall v \in V$$

を満たす.

証明. いま各 $i \neq n$ について

$$\begin{aligned} t_i(v) =& \sum_{j\neq i} v_j(d(v)) - \max_{a\in A}\Big(\sum_{j\neq i,n} v_j(a) + \frac{n-2}{n-1}v_n(a)\Big) \\ =& \frac{1}{n-1}v_n(d(v)) \\ &+ \sum_{j\neq i,n} v_j(d(v)) + \frac{n-2}{n-1}v_n(d(v)) \\ &- \max_{a\in A}\Big(\sum_{j\neq i,n} v_j(a) + \frac{n-2}{n-1}v_n(a)\Big) \quad \forall \in V \end{aligned}$$

である.

そして各 $i \neq n$ について

$$\sum_{j\neq i,n} v_j(d(v)) + \frac{n-2}{n-1}v_n(d(v)) \leq \max_{a\in A}\Big(\sum_{j\neq i,n} v_j(a) + \frac{n-2}{n-1}v_n(a)\Big) \ \forall v \in V$$

であることに注意すると

$$\sum_{i\neq n} t_i(v) \leq (n-1)\cdot\frac{1}{n-1}v_n(d(v)) = v_n(d(v)) \quad \forall v \in V$$

が成り立つことが分かる．よって v_n の定義から直ちに

$$\sum_{i\neq n} t_i(v) \leq -c(d(v)) \quad \forall v \in V$$

が得られる． □

ただしクラークメカニズムは往々にして

$$\sum_{i \neq n} t_i(v) < -c(d(v))$$

としてしまう．つまりお金を必要以上に徴収するので，予算バランスを満たすことができない．これはピボタルメカニズムと同様の欠点であり，この公共財供給問題でもやはり定理 3 と同様の不可能性が成り立つ．

1.5.3　単一財オークション

ひとつの財を販売するオークションを考えよう．選択肢の集合を個人の集合と一致させるべく

$$A = I$$

とする．これは $d(v) = i$ となった個人はオークションの勝者となることを意味している．そして各 $i \in I$ について

$$V_i = \{v \in \mathbb{R}^A : v_i(i) \geq 0 \text{ かつ } v_i(j) = 0 \ \ \forall j \neq i\}$$

とする．つまり自分が勝者となったら便益は非負だが，敗者ならゼロである．

各 h_i を

$$h_i(v_{-i}) = -\max_{a \in A} \sum_{j \neq i} v_j(a) \ \ \forall v_{-i} \in V_{-i}$$

により定めてみよう．こうして定義された (d,t) を**第二価格オークション**という (Vickrey 1961)．つまり単一財オークションにおけるピボタルメカニズムが第二価格オークションである．

なぜ第二価格というのか理由を確認していこう．いま $A=I$ なので

$$h_i(v_{-i}) = -\max_{k\in I}\sum_{j\neq i} v_j(k) \quad \forall v_{-i}\in V_{-i}$$

と書ける．そして $v_j(k)=0$ が任意の $j\neq i,k$ について成り立つことに注意して，更に書き換えると

$$h_i(v_{-i}) = -\max_{k\neq i} v_k(k) \quad \forall v_{-i}\in V_{-i} \tag{1.17}$$

である．

ここで n 個の数

$$v_1(1), v_2(2), \ldots, v_n(n)$$

のうち一番高い値を $v[1]$，二番目に高い値を $v[2]$ と記すと便利である．いま $v\in V$ のもとで i が勝者ならば，つまり $d(v)=i$ ならば，効率性から $v_i(i)=v[1]$ が成り立っており，また (1.17) より

$$h_i(v_{-i}) = -v[2]$$

である．よって勝者 i について

$$t_i(v) = \sum_{j\neq i}\underbrace{v_j(i)}_{=0} - v[2] = -v[2]$$
$$U(d(v), t_i(v); v_i) = v[1] - v[2] \geq 0$$

が成り立つ．つまり勝者は二番目に高い付け値を払っている．なお，このとき敗者 i については

$$t_i(v) = v[1] - v[1] = 0$$

であり支払い額はゼロになっている．第二価格オークションはひとつの財を扱うオークションの理論では中心的な役割を果たすものである．

二択の選択や公共財供給と異なり，オークションの環境では予算バランスは成り立つ必要が無い．あくまで予算バランスは I に属する個人たちの間で金銭移転が閉じていることを求める条件で，オークションのように外部の売り手にお金が移るのが自然な環境ではその条件が成り立つのはむしろ不自然だからだ．

1.5.4　組み合わせオークション

各個人が複数の財を購入しうるオークションを組み合わせオークションという．単一財のときと比べるとセットアップはやや手間取るが本質的な相違はない．X を有限個ある財の集合としよう．**配分**$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ とは

$$\begin{aligned} & a_i \subseteq X \quad \forall i \in I \\ & a_i \cap a_j = \emptyset \quad \forall i, j \in I \end{aligned}$$

を満たす，X の（空でありえる）互いに疎な部分集合の組み合わせのことである．そして A を配分の集合とする．なお X が有限なので A も有限である．

各 $i \in I$ の評価関数 $v_i : A \to \mathbb{R}$ は

$$\begin{aligned}
&a_i = b_i \implies v_i(a) = v_i(b) \ \ \forall a, b \in A \\
&a_i = \emptyset \implies v_i(a) = 0 \ \ \forall a \in A \\
&v_i(a) \geq 0 \ \ \forall a \in A \\
&a_i \subseteq b_i \implies v_i(a) \leq v_i(b) \ \ \forall a, b \in A
\end{aligned}$$

を満たすものとする．これら条件の解釈はそれぞれ，自分の得る財にのみ関心があり，何も得られないなら便益はゼロであり，便益が負になることは無く，得る財が増えたとき便益が減らないこと，である．そうした評価関数の集合を V_i で表す．

単一財オークションのときと同様に各 h_i を

$$h_i(v_{-i}) = -\max_{a \in A} \sum_{j \neq i} v_j(a) \ \ \forall v_{-i} \in V_{-i}$$

と定める．このとき各 $i \in I$ について

$$t_i(v) = \sum_{j \neq i} v_j(d(v)) - \max_{a \in A} \sum_{j \neq i} v_j(a) \leq 0 \ \ \forall v \in V$$

である．こうして定義された (d, t) を VCG オークション，あるいは VCG メカニズムと呼ぶ．定義上当たり前のことだが，組み合わせオークションにおけるピボタルメカニズムが VCG オークションである．

1.6 おわりに

耐戦略性はメカニズムデザインにおいて最も重要な誘因両立性の条件である．準線形環境ではグローヴスメカニズムがこの条件と効率性

をともに満たす．準線形環境は，費用がかかる公共財の供給や，私的財の売買を行うオークションなど，一見大きく異なる問題を統一的に扱うことができる．ピボタルメカニズムやクラークメカニズムはグローヴスメカニズムの優れた例であり，それぞれの問題の事情に応じて，どのグローヴスメカニズムを用いるか選択すればよい．

第2章　公理的特徴付け

2.1　はじめに

Groves and Loeb (1975) と Green and Laffont (1977) が，すべてのグローヴスメカニズムが効率性と耐戦略性を満たすことを指摘して以来，他にそのようなメカニズムは存在しないのかという問いが注目を集めた．この問いに対する解答の代表は Green and Laffon (1977) と Holmström (1979) が与えたものであり，それらを総括すると，一定の弱い条件のもとで，もしあるメカニズムが効率性と耐戦略性を満たすならば，それはグローヴスメカニズムでなければならないというものだ．つまりグローヴスメカニズムたち以外にそのようなメカニズムは存在しない．これを効率性と耐戦略性によるグローヴスメカニズムの公理的特徴付けという．

つまり効率性と耐戦略性を求めるならばグローヴスメカニズムのいずれかを採用せざるを得ない．あるいはその中に気に入ったものが無いならば効率性か耐戦略性のいずれかを諦めなければならない．グローヴスメカニズムがメカニズムデザインで王者のように扱われているのは，この公理的特徴付けに依るところが大きい．そこで本章では Holmström (1979) による公理的特徴付けを，その背後のアイデアに遡

り丁寧に論じていく．モデルや記号使いは第 1 章のものをそのまま引き継ぐ．

2.2　耐戦略性は t をどう制約するのか

まずグローヴスメカニズムの定義は抽象的であり，なかなか自然に思いつくようなものではないという認識を出発点としよう．

いったい t がどのような形状をしていればメカニズム (d,t) は耐戦略性を満たせるのだろうか．改めて述べるが既に d は効率性を満たす任意の決定関数として固定されている．すなわちこの d のもとで，t がどのような制約を守れば (d,t) は耐戦略性を満たせるのか．

いま $i \in I$ について，関数 $h_i : V \to \mathbb{R}$ を

$$h_i(v) = t_i(v) - \sum_{j \neq i} v_j(d(v)) \quad \forall v \in V$$

により定義してみる．すると当然ながら

$$t_i(v) = h_i(v) + \sum_{j \neq i} v_j(d(v)) \quad \forall v \in V$$

が成り立つ．そこで，もし h_i が i の評価関数に全く依存しないならば，つまり

$$h_i(v) = h_i(v_i', v_{-i}) \quad \forall v_i, v_i' \in V_i,\ \forall v_{-i} \in V_{-i} \tag{2.1}$$

が成り立つならば何が起こるだろうか．

いま i の（真の）評価関数を $v_i \in V_i$ として，i 以外の（表明する）評価関数を $v_{-i} \in V_{-i}$ として考えてみよう．そこで i が v_i を正直に表明したときの準線形効用は

$$
\begin{aligned}
&U(d(v_i, v_{-i}), t_i(v_i, v_{-i}); v_i) \\
=&v_i(d(v_i, v_{-i})) + t_i(v_i, v_{-i}) \\
=&v_i(d(v_i, v_{-i})) + \sum_{j \neq i} v_j(d(v_i, v_{-i})) + h_i(v_i, v_{-i}) \\
=&\sum_{j \in I} v_j(d(v_i, v_{-i})) + h_i(v_i, v_{-i}) \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

である．一方で，偽って $v_i' \in V_i$ を表明したならば

$$
\begin{aligned}
&U(d(v_i', v_{-i}), t_i(v_i', v_{-i}); v_i) \\
=&v_i(d(v_i', v_{-i})) + t_i(v_i', v_{-i}) \\
=&v_i(d(v_i', v_{-i})) + \sum_{j \neq i} v_j(d(v_i', v_{-i})) + h_i(v_i', v_{-i}) \\
=&\sum_{j \in I} v_i(d(v_i', v_{-i})) + h_i(v_i', v_{-i}) \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

である．ここで，もし $h_i(v) = h_i(v_i', v_{-i})$ が成り立つならば，(2.2) と (2.3) より

$$
\begin{aligned}
&U(d(v_i, v_{-i}), t_i(v_i, v_{-i}); v_i) \geq U(d(v_i', v_{-i}), t_i(v_i', v_{-i}); v_i) \qquad (2.4) \\
\iff &\sum_{j \in I} v_j(d(v_i, v_{-i})) \geq \sum_{j \in I} v_j(d(v_i', v_{-i})) \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

が得られるが，(2.5) は d の効率性から成り立つので，(2.4) も成り立つことになる．これは耐戦略性が成り立つことを意味している．そし

てまたこの議論は，やはりグローヴスメカニズムが耐戦略性を満たすことの証明になっているものだ．

耐戦略性はきわめて強い性質だが，(2.1) の成立を要求すると，あっさりとそれが成り立ってしまうのだ．この事実は自明ではないが，理路は明瞭である．メカニズム (d, t) の耐戦略性は，(2.1) が成り立つときには，決定関数 d の効率性に帰着するのだ．すなわち効率性のもとでは条件 (2.1) が耐戦略性を含意する．

2.3　最大化問題による接近

前節と似た議論を最大化問題の観点から展開しよう．ここでは $i \in I$ と $v \in V$ を固定して考える．まず h_i の定義から，どのような $b_i \in V_i$ についても

$$U(d(b_i, v_{-i}), t_i(b_i, v_{-i}); v_i) = \sum_{j \in I} v_j(d(b_i, v_{-i})) + h_i(b_i, v_{-i}) \qquad (2.6)$$

が成り立つ．(2.6) を $b_i \in V_i$ を変数とする関数として見ると，耐戦略性は，v_i がこの関数の最大化問題の解となることを要求している．

そしてまた $b_i \in V_i$ を変数とする関数

$$\sum_{j \in I} v_j(d(b_i, v_{-i})) \qquad (2.7)$$

を見てみると，効率性から

$$\sum_{j \in I} v_j(d(v_i, v_{-i})) = \max_{a \in A} \sum_{j \in I} v_j(a) \geq \max_{b_i \in V_i} \sum_{j \in I} v_j(d(b_i, v_{-i}))$$

が得られるので，効率性は v_i が関数 (2.7) の最大化問題の解となることを要求している．そしてそれらふたつの関数 (2.6) と (2.7) の違いは h_i の項の有無だけである．

ではそれらふたつの「v_i が最大化問題の解となること」の要求が両立するためには何が成り立たねばならないのか．そこで，どうしても目が行くのが (2.6) の h_i である．もしこの $h_i(\,\cdot\,, v_{-i})$ が b_i から独立しているならば，つまり

$$h_i(b_i, v_{-i}) = h_i(b_i', v_{-i}) \quad \forall b_i, b_i' \in V_i \tag{2.8}$$

が成り立つのであれば，h_i の項は定値でありその「両立」を阻害しない．

この議論は，効率性と耐戦略性の両立にとって，(2.8) の成立が本質的なのではないかと強く推察させるものだ．言うまでもなく (2.8) と (2.1) は全く同じ内容を意味している．つまり前節の議論では，h_i が (2.8) を満たせば耐戦略性が成り立つことを示していた．そして今節の議論は，耐戦略性を満たすためには (2.8) の成立が欠かせないのではないかというものだ．

そこで問おう．効率性のもとで耐戦略性は条件 (2.1) を含意するのだろうか．もしそうであれば，効率性のもとでは，耐戦略性は数学的には条件 (2.1) と同値だということになる．結論から述べると，広範の応用モデルが満たす一般的な条件のもとで，その同値性が成り立つ．

2.4　ホルムストロームの公理化

個人 $i \in I$ のドメイン V_i が**凸性**を満たすとは，任意の $v_i, v_i' \in V_i$ と任意の $s \in [0,1]$ について，いま $v^s : A \to \mathbb{R}^A$ を

$$v_i^s(a) = s \cdot v_i(a) + (1-s) \cdot v_i'(a) \ \ \forall a \in A$$

により定めると，$v_i^s \in V_i$ となっていることである．第1.5節で紹介した四つの応用例では全ての個人のドメインが凸になっている．またそれら全ての応用例で A が有限集合であったことを想起して，次の定理に向かおう．それは Holmström (1979) による結果を，やや一般性を落としつつ，応用しやすいよう述べたものだ．

定理 4. いま全ての $i \in I$ について V_i が凸性を満たすとする．また A を有限集合とする．もしメカニズム (d,t) が効率性と耐戦略性を満たすならば，それはグローヴスメカニズムである．

証明. 効率性と耐戦略性を満たす任意のメカニズム (d,t) を考える．これから (d,t) がグローヴスメカニズムであることを示す．

ステップ1（セットアップ）任意の $i \in I$ について，関数 $h : V \to \mathbb{R}$ を

$$h_i(v) = t_i(v) - \sum_{i \neq j} v_j(d(v)) \ \ \forall v \in V \tag{2.9}$$

により定める．

任意の $i \in I$ と $v_{-i} \in V_{-i}$ について考える．これから任意の $v_i, v_i' \in V_i$ について

$$h_i(v) = h_i(v_i', v_{-i})$$

が成り立つと示せれば, (d,t) がグローヴスメカニズムだということになる.

そこで任意の $s \in [0,1]$ について，評価関数 $v_i^s : A \to \mathbb{R}$ を

$$v_i^s(a) = s \cdot v_i(a) + (1-s) \cdot v_i'(a) \quad \forall a \in A$$

により定義すると，凸性より $v_i^s \in V_i$ である.

そして関数 $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ を

$$f(p,s) = \sum_{j \neq i} v_j(d(v_i^p, v_{-i})) + v_i^s(d(v_i^p, v_{-i}))$$

により定義すると, 効率性より任意の $s \in [0,1]$ について

$$f(s,s) = \max_{p \in [0,1]} f(p,s) \tag{2.10}$$

が成り立つ. また耐戦略性より任意の $s \in [0,1]$ について

$$f(s,s) + h_i(v_i^s, v_{-i}) = \max_{p \in [0,1]} (f(p,s) + h_i(v_i^p, v_{-i})) \tag{2.11}$$

が成り立つ.

次に A の有限性に注意すると，任意の $p \in [0,1]$ について

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(p,s)}{\partial s} &= v_i(d(v_i^p, v_{-i})) - v_i'(d(v_i^p, v_{-i})) \\ &\leq K \equiv \max_{a \in A}(v_i(a) - v_i'(a)) < \infty \end{aligned} \tag{2.12}$$

が成り立つ.

ステップ 2（リプシッツ連続性の充足）

非空集合 $X \subseteq \mathbb{R}^\ell$ のうえで，関数 $F: X \to \mathbb{R}$ がリプシッツ連続であるとは，ある $c \geq 0$ が存在して，任意の $x, x' \in X$ について

$$|F(x) - F(x')| \leq c \cdot |x - x'|$$

が成り立つことである．リプシッツ連続な F は X の殆ど全ての点で微分可能であることが知られている[1]．これから以下で定義する諸々の関数がリプシッツ連続であることを示していく．

ステップ 2-1（$\boldsymbol{W}$ のリプシッツ連続性） 関数 $W: [0,1] \to \mathbb{R}$ を

$$W(s) = f(s, s) \quad \forall s \in [0,1]$$

と定める．これから W が $[0,1]$ 上でリプシッツ連続であることを示す．任意の $s, s' \in [0,1]$ について考え，一般性を失うことなく $W(s) \geq W(s')$ とする．ここで，(2.10) から

$$f(s, s') - f(s', s') \leq 0$$

であることに注意すると，(2.12) から

$$\begin{aligned} 0 \leq W(s) - W(s') &= f(s,s) - f(s,s') + f(s,s') - f(s',s') \\ &\leq f(s,s) - f(s,s') \leq K \cdot |s - s'| \end{aligned}$$

が成り立つのでリプシッツ連続であることがわかる．

ステップ 2-2（$\boldsymbol{G}$ のリプシッツ連続性） 関数 $W: [0,1] \to \mathbb{R}$ を

$$G(s) = f(s, s) + h_i(v_i^s, v_{-i}) \quad \forall s \in [0,1]$$

[1] これらに詳しい解析学の教科書として Royden and Fitzpatrick (2010) をあげておく．

と定める．これから G が $[0,1]$ 上でリプシッツ連続であること示す．任意の $s, s' \in [0,1]$ について考え，一般性を失うことなく $G(s) \geq G(s')$ とする．ここで，(2.11) から

$$f(s,s') + h_i(v_i^s, v_{-i}) - (f(s',s') - h_i(v_i^{s'}, v_{-i})) \leq 0$$

であることに注意すると

$$\begin{aligned} 0 \leq G(s) - G(s') &= f(s,s) + h_i(v_i^s, v_{-i}) - (f(s,s') + h_i(v_i^s, v_{-i})) \\ &\quad + f(s,s') + h_i(v_i^s, v_{-i}) - (f(s',s') + h_i(v_i^{s'}, v_{-i})) \\ &\leq f(s,s) - f(s,s') \leq K \cdot |s - s'| \end{aligned}$$

が成り立つのでリプシッツ連続であることがわかる．

ステップ 2-3（$\boldsymbol{H}$ のリプシッツ連続性） 関数 $H : [0,1] \to \mathbb{R}$ を

$$H(s) = h_i(v_i^s, v_{-i}) = G(s) - W(s) \quad \forall s \in [0,1]$$

と定める．これから H が $[0,1]$ 上でリプシッツ連続であることを，W と G のリプシッツ連続性から示す．任意の $s, s' \in [0,1]$ について考え，一般性を失うことなく $H(s') \leq H(s)$ とする．すると

$$\begin{aligned} 0 \leq H(s) - H(s') &= G(s) - W(s) - (G(s') - W(s')) \\ &\leq |G(s) - G(s')| + |W(s) - W(s')| \\ &\leq 2K \cdot |s - s'| \end{aligned}$$

が成り立つので，H はリプシッツ連続である．

ステップ 3（$\boldsymbol{H}$ の性質） これから H の微係数が $(0,1)$ 上の殆ど全ての点でゼロであることを示す．

ステップ 3-1（φ の性質）関数 $\varphi:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ を

$$\varphi(p,s)=f(p,s)-f(s,s)\quad \forall s\in[0,1]$$

と定める．すると (2.12) から任意の $p\in(0,1)$ について

$$\lim_{s\uparrow p}\frac{f(p,s)-f(p,p)}{p-s}=\lim_{s\downarrow p}\frac{f(p,s)-f(p,p)}{p-s}$$

が成り立ち，W のリプシッツ連続性から，殆ど全ての $p\in(0,1)$ について

$$\lim_{s\uparrow p}\frac{W(p)-W(s)}{p-s}=\lim_{s\downarrow p}\frac{W(p)-W(s)}{p-s}$$

が成り立つ．

任意の異なる $p,s\in[0,1]$ について

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(p,s)}{p-s}&=\frac{f(p,s)-f(p,p)}{p-s}+\frac{f(p,p)-f(s,s)}{p-s}\\&=\frac{f(p,s)-f(p,p)}{p-s}+\frac{W(p)-W(s)}{p-s}\end{aligned}$$

が成り立つゆえ，殆ど全ての $p\in(0,1)$ について

$$\lim_{s\uparrow p}\frac{\varphi(p,s)}{p-s}=\lim_{s\downarrow p}\frac{\varphi(p,s)}{p-s}$$

が得られる．そして (2.10) から

$$\varphi(p,s)\le 0\qquad \forall p,s\in[0,1]$$

が成り立つので，分母の符号に注意をすると，殆ど全ての $p\in(0,1)$ について

$$0\le\lim_{s\downarrow p}\frac{\varphi(p,s)}{p-s}=\lim_{s\uparrow p}\frac{\varphi(p,s)}{p-s}\le 0$$

が従う．つまり殆ど全ての $p \in (0,1)$ について

$$\lim_{s \to p} \frac{\varphi(p,s)}{p-s} = 0 \tag{2.13}$$

が成り立つ．

ステップ 3-2（$\boldsymbol{\pi}$ の性質） 関数 $\pi : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ を

$$\pi(p,s) = f(p,s) + H(p) - (f(s,s) + H(s)) \quad \forall p, s \in [0,1]$$

と定める．すると (2.12) より任意の $p \in (0,1)$ について

$$\lim_{s \uparrow p} \frac{f(p,s) - f(p,p)}{p-s} = \lim_{s \downarrow p} \frac{f(p,s) - f(p,p)}{p-s}$$

が成り立ち，G のリプシッツ連続性から, 殆ど全ての $p \in (0,1)$ について

$$\lim_{s \uparrow p} \frac{G(p) - G(s)}{p-s} = \lim_{s \downarrow p} \frac{G(p) - G(s)}{p-s}$$

が成り立つ. 任意の異なる $p, s \in [0,1]$ について

$$\begin{aligned}\frac{\pi(p,s)}{p-s} &= \frac{f(p,s) - f(p,p)}{p-s} + \frac{f(p,p) + H(p) - (f(s,s) + H(s))}{p-s} \\ &= \frac{f(p,s) - f(p,p)}{p-s} + \frac{G(p) - G(s)}{p-s}\end{aligned}$$

が成り立つゆえ，殆ど全ての $p \in (0,1)$ について

$$\lim_{s \uparrow p} \frac{\pi(p,s)}{p-s} = \lim_{s \downarrow p} \frac{\pi(p,s)}{p-s}$$

が従う．(2.11) から

$$\pi(p,s) \le 0 \quad \forall p, s \in [0,1]$$

が成り立つので，分母の符号に注意すると，殆ど全ての $p \in (0,1)$ について

$$0 \leq \lim_{s \downarrow p} \frac{\pi(p,s)}{p-s} = \lim_{s \uparrow p} \frac{\pi(p,s)}{p-s} \leq 0$$

が従う．つまり殆ど全ての $p \in (0,1)$ について

$$\lim_{s \to p} \frac{\pi(p,s)}{p-s} = 0 \tag{2.14}$$

である．

ステップ 3-3（$\boldsymbol{H' = 0}$） いま (2.13) と (2.14) より，殆ど全ての $p \in (0,1)$ について

$$\lim_{s \to p} \left(\frac{\varphi(p,s)}{p-s} - \frac{\pi(p,s)}{p-s} \right) = 0$$

が成り立つ．そして π と φ の定義から

$$\lim_{s \to p} \frac{H(p) - H(s)}{p-s} = 0$$

である．つまり殆ど全ての $p \in (0,1)$ について

$$H'(p) = 0$$

が成り立つ．

ステップ 4（証明終了） ステップ 3-3 より $H'(p) = 0$ が殆ど全ての $p \in (0,1)$ で成り立ち，ステップ 2-3 より H は $[0,1]$ 上でリプシッツ連続である．よって H は $[0,1]$ 上の定値関数である．定義より $H(s) =$

$h_i(v_i^s, v_{-i})$ であり，定値関数ということは $h_i(v_i^0, v_{-i}) = h_i(v_i^1, v_{-i})$，すなわち

$$h_i(v) = h_i(v_i', v_{-i})$$

が成り立つ. $\square$

2.5　おわりに

凸性という，応用モデルで広く成り立つ条件のもとで，効率性と耐戦略性をともに満たすメカニズムはグローヴスメカニズム以外に存在しない．その意味でグローヴスメカニズムの定義は完璧である．なお，Holmström (1979) はスムース連結性（smooth connectedness）という，凸性より更に弱い条件を使ってグローヴスメカニズムの公理的特徴付けを行っている．しかし通常の経済モデルではドメインが凸性を満たすことがきわめて多い．著者の知る限り，スムース一般性を満たすが凸性を満たさないドメインは，技巧的には作れるものの，通常の経済モデルには存在しない．スムース連結性は定義がかなり数学的でその確認もあまり容易ではない．Holmström (1979) 自身はスムース連結性のもとで公理的特徴付けを行い (Theorem 1)，その後で凸性がスムース連結性より強い条件であることを示している (Theorem 2)．定理 4 の証明は彼の Theorem 1 を凸性のもとで書き直すとこのように単純になるというものだ.

第3章　ごみ処分場立地問題と戦略的操作の許容

3.1　はじめに

本章の目的はふたつある．ひとつ目はこれまで扱った準線形環境では扱いきれない新たなモデルを提案すること．具体的には，ごみ処分場立地問題という現実的な問題を考察するために，それ用に準線形環境のモデルを作り議論を展開する．ふたつ目は戦略的操作が避けられないときにどうすればよいかを考えること．この問題では予算バランスの観点からグローヴスメカニズムを使うことが適切でない．よってグローヴスメカニズム以外を用いる必要があるわけだが，前章までの議論はそれでは戦略的操作の影響から逃れられないことを示している．そこで私たちは一定の戦略的操作を許容することを考える．もし戦略的操作による被害が少ないならそれを受け入れようというわけだ．なお，本章の議論は Sakai (2012) によるものを大幅に簡略化したものである[1]．

[1]日本語での紹介文献に坂井 (2008) がある．

3.2　ごみ処分場立地問題

地域の集合を $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ で表す．各 $i \in I$ はごみの量 $w_i > 0$ を排出しており，共同で用いるごみ処分場を必要としている．$w = (w_i)_{i \in I}$ をごみの量の組とする．

各グループ $S \subseteq I$ について，$W_S = \sum_{i \in S} w_i$ を S のメンバーたちが排出しているごみの総量とする．また，$W = W_I > 0$ を社会全体におけるごみの総量とする．

W を処理する規模の処分場が地域 $i \in I$ に建ったとき，地域 i は不効用 $v_i(W) \geq 0$ を得て，他の地域 $j \neq i$ は不効用を得ない．**不効用関数**$v_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ は強単調で強凹であり，$v_i(0) = 0$ を満たすものとする．強凹性は「自分の地域にある施設の処理可能量が倍になっても，不効用までは倍にならない」ことを意味する．V_i を不効用関数の集合とする．また $V = \times_{i \in I} V_i$ と置く．

各地域は処理施設の規模と金銭移転額に対し準線形選好を持っており，それは次の準線形関数

$$U(W, t_i; v_i) = -v_i(W) + t_i \tag{3.1}$$

により表現される．ここで $-v_i(W)$ は i が規模 W の施設を受け入れたときの不効用を，t_i は i の金銭移転額を表す．

割り当て関数$\sigma : I \to \{0, 1\}$ とは

$$|\{i \in I : \sigma(i) = 1\}| = 1 \tag{3.2}$$

を満たす関数のことであり，これは受け入れ地域を決定する．A を割り当て関数の集合とする．各 $i \in I$ に対し，$\sigma(i) = 1$ ならば施設は i に建設され，$\sigma(i) = 0$ ならば施設はどこか他の $j \neq i$ に建設される．

金銭移転ベクトルとは

$$t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^I$$

のうち予算バランス条件

$$\sum_{i \in I} t_i = 0 \tag{3.3}$$

を満たすもののことである．T を金銭移転ベクトルの集合とする．

配分とは割り当て関数と金銭移転ベクトルの組

$$x = (\sigma, t) \in X = A \times T \tag{3.4}$$

である．配分 (σ, t) のもとで各 $i \in I$ は

$$x_i = (\sigma(i) \cdot W, t_i) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$$

を得て，そのときの準線形効用は

$$U(\sigma(i) \cdot W, t_i; v_i) = -\, v_i(W) + t_i \tag{3.5}$$

で与えられる．ここで $\sigma(i) = 0$ ならば $U(\sigma(i) \cdot W, t_i; v_i) = t_i$ となることに注意されたい．

いま各 $i \in I$ について w_i は他者から確認可能な情報とする．しかし v_i は他者からは分からない．

ルールとは $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in V$ に対して，配分

$$\psi(v) \in X$$

を与える関数のことである．各 $x = \psi(v)$ と $i \in I$ に対し，$x_i = \psi_i(v)$ と書く．

3.3　不可能性定理

いま $v \in V$ のもとで配分 $x = (\sigma, t) \in X$ が**効率的**であるとは，$\sigma(j) = 1$ なる j について

$$v_j(W) = \min_{i \in I} v_i(W)$$

が成り立つことである．$P(v)$ を v のもとでの効率的な配分の集合とする．そして全ての $v \in V$ について $\psi(v) \in P(v)$ が成り立つとき，ψ を効率的という．

ルール ψ が**耐戦略性**を満たすとは任意の $v \in V$，任意の $i \in I$，任意の $v'_i \in V_i$ について

$$U(\psi_i(v); v_i) \geq U(\psi_i(v'_i, v_{-i}); v_i)$$

が成り立つことである．

このモデルは前章までの準線形環境とは異なるが，定理 4 と同様の結果が証明できる．つまりもしあるルールが効率性と耐戦略性を満たすならば，それはグローヴスメカニズム（の一般形）である．そしてこのモデルでは配分の定義に予算バランス条件 (3.3) が含まれているので，定理 3 と同様の方法で，それらメカニズムはいずれも予算バランスを満たさないことが示せる．つまりこのモデルにおいて効率性と耐戦略性を満たすルールは存在しない．このことを不可能性定理として述べておこう．

定理 5. ごみ処分場立地問題において，効率性と耐戦略性を満たすルールは存在しない．

3.4　可能性定理

定理 5 はネガティブだがどのようなルールを用いればよいだろうか．まず効率性については強めてみよう．

グループ $S \subseteq I$ が x を**ブロック**出来るとは，x から逸脱し，S 内のどこかに自前の施設を作ることでメンバー全ての効用を上げることが出来る，つまり

$$\sum_{i \in S} U(x_i; v_i) < -\min_{i \in S} v_i(W_S)$$

が成り立つことである．こうしたブロックがどのグループも出来ない x を**コア配分**と呼び，その集合を $C(v)$ で表す．そして全ての $v \in V$ について $\psi(v) \in C(v)$ が成り立つとき，ψ を**コア選択的**という．

当然ながらコア配分は効率的である．よってコア選択的なルールは効率的である．コア配分はどのようなグループの逸脱によっても達成できない高い効用水準をすべての地域に与えるという意味での分配的公正にかなうものであり，またこの配分で決めようとなったときに対抗案が誰にも出せないという意味で遂行しやすい．

公正価格ルールとは，任意の $v \in V$ について，$\sigma(j) = 1$ とすると

$$\begin{aligned} v_j(W) &= \min_{i \in I} v_i(W) \\ t_j &= -w_j \cdot \frac{v_j(W)}{W} + v_j(W) \\ t_i &= -w_i \cdot \frac{v_j(W)}{W} \qquad \forall i \neq j \end{aligned} \tag{3.6}$$

を満たすルールのことである．

公正価格ルールのもとでは各 $i \in I$ について

$$U(\psi_i(v); v_i) = -w_i \cdot \frac{v_j(W)}{W}$$

が成り立つ．そして $v \in V$ における**公正価格**を

$$p(v) \equiv \frac{\min_{i \in I} v_i(W)}{W} > 0$$

で定める．

(3.6) を満たす j が 2 地域以上あるケースもあるので，公正価格ルールは複数存在する．しかしどのような公正価格ルール ψ, ψ' についても

$$U(\psi_i(v); v_i) = U(\psi'_i(v); v_i) \ \ \forall v \in V,\ \forall i \in I$$

が成り立つので，どの公正価格ルールを用いても各地域に与える厚生は全く変わらない．この意味で公正価格ルールは実質的にひとつしか存在しない．

定理 6. いずれの公正価格ルールもコア選択性を満たす．

証明. ψ を任意の公正価格ルールとする．任意の $v \in V$ と $S \subseteq I$ について考える．そして $j \in I$ と $k \in S$ を

$$\begin{aligned} v_j(W) &= \min_{i \in I} v_i(W), \\ v_k(W_S) &= \min_{i \in S} v_i(W_S) \end{aligned}$$

を満たす個人とする．

このとき

$$\sum_{i \in S} U(\psi_i(v); v_i) = -W_S \frac{v_j(W)}{W}$$

かつ

$$-\min_{i\in S} v_i(W_S) = -v_k(W_S)$$

である．

よって ψ がコア選択であると示すためには

$$-W_S\frac{v_j(W)}{W} \geq -v_k(W_S)$$

が成り立つことを示せば十分だが，この不等式は

$$\frac{v_k(W_S)}{v_j(W)} \geq \frac{W_S}{W} \tag{3.7}$$

と変形できる．

ここで $v_j(W) \leq v_k(W)$ と v_k の強凹性から

$$\frac{v_k(W_S)}{v_j(W)} \geq \frac{v_k(W_S)}{v_k(W)} \geq \frac{W_S}{W}$$

が成り立つので，(3.7) が示せた．　□

公正価格ルールが耐戦略性を満たさないことは容易に確認できる．しかしこのことは，起こりうる戦略的操作が深刻であることまでは意味しない．そこで戦略的操作の帰結を理解するために**直接表明ゲーム**を定義しよう．

いま ψ を公正価格ルールとする．そして $v \in V$ のもとで，$v' \in V$ が直接表明ゲームにおける**ナッシュ均衡**であるとは

$$U(\psi_i(v'); v_i) \geq U(\psi_i(v''_i, v'_{-i}); v_i) \quad \forall i \in I,\ \forall v''_i \in V_i \tag{3.8}$$

が成り立つことである．$N(\psi, v)$ をそうしたナッシュ均衡の集合とする．

次の定理はナッシュ均衡において公正価格は本来あるべき値より上昇するものの,「次善の」公正価格よりは低い値になり，そして（正直申告のもとでの）コア配分が選ばれる．すなわち公正価格は上方にズレるがその程度は大きなものでは無く，また正しいコア配分のひとつが得られる．この意味で戦略的操作は深刻なものではない．証明は長いゆえ次節でまとめて与える．

定理 7. ψ を公正価格ルールとする．任意の $v \in V$ と $v' \in N(\psi, v)$ について考える．いま

$$v_1(W) \geq v_2(W) \geq \cdots \geq v_n(W)$$

とする．このとき条件

$$\begin{aligned} &\text{(i)}\ p(v) = \frac{v_n(W)}{W} \leq p(v') \leq \frac{v_{n-1}(W)}{W} \\ &\text{(ii)}\ \psi(v') \in C(v) \end{aligned}$$

が成り立つ．

解釈を与えておこう．まず (3.6) を満たす j が 2 地域以上あるケースでは，操作された公正価格 $p(v')$ は真の公正価格 $p(v)$ と一致する．ここで (i) について，$p(v')$ が $p(v)$ と較べ非常に大きい値を取りうるという批判があるかもしれない．しかし (ii) はそれでもなお $p(v')$ を伴う配分は正しいコア配分のひとつであることを例外なく保証している．つまり戦略的操作されてもなおコア選択性は崩れない．

次の系は定理 7 から直ちに導かれる．解釈を容易にするため効率的な立地が地域 n のみである状況について記した．

系 1. ψ を公正価格ルールとする．任意の $v \in V$ と $v' \in N(\psi, v)$ について考える．いま

$$v_1(W) \geq v_2(W) \geq \cdots > v_n(W)$$

とする．このとき

(i) n が$\psi(v')$ における受け入れ地域

(ii) $U(\psi_n(v); v_n) \leq U(\psi_n(v'); v_n)$

(iii) $U(\psi_i(v')) \leq U(\psi_i(v)) \;\; \forall i \neq n$

である．

この系の意味する事は明瞭であろう．(i) 本来建設されるべき場所に施設は建設され，(ii) その地域は戦略的操作により本来より多い補償を受け取り，(iii) その他の地域は本来より多い補償を支払う．しかし n が操作により増やした補償額は決して大きなものでは無く，コア配分が実現するほどに強く抑えられている．

つまり公正価格ルールは耐戦略性を満たさないものの，起こり得る戦略的操作をナッシュ均衡で表した場合，操作の度合いは許容出来る程度に小さなものである．つまり公正価格は戦略的操作について「ほぼ」頑健といえる．

ところで直接表明ゲームで常にナッシュ均衡が存在するかという問いをこれまで扱ってこなかった．結論から言うと ψ の作り方によっては常に存在する．つまり，ある公正価格ルール ψ が存在して

$$N(\psi, v) \neq \emptyset \;\; \forall v \in V$$

を満たす．この問題は技術的に込み入っており，また本章の目的からやや逸れるのでこれ以上扱わない．関心のある者は Sakai (2012) を参照されたい．

3.5　定理 7 の証明

任意の $v \in V$ と $v' \in N(\psi, v)$ について考える．いま

$$v_1(W) \geq v_2(W) \geq \cdots \geq v_n(W)$$

とする．そして $(\sigma, t) = \psi(v')$，$\sigma(j) = 1$ とする．

これから

$$\begin{aligned} &\text{(i) } p(v) = \frac{v_n(W)}{W} \leq p(v') \leq \frac{v_{n-1}(W)}{W} \\ &\text{(ii) } \psi(v') \in C(v) \end{aligned}$$

を示していきたい．そのために以下 4 つの補題を証明する．

補題 2. ある $k \neq j$ が存在して

$$v'_k(W) = v'_j(W)$$

を満たす．

証明. 背理法により矛盾を導くため，全ての $i \neq j$ について $v'_i(W) > v'_j(W)$ が成り立つと仮定する．このとき

$$\min_{i \neq j} v'_i(W) > v''_j(W) > v'_j(W) \tag{3.9}$$

を満たす $v''_j \in V_j$ が存在する．すると公正価格ルールの定義より

$$\begin{aligned} U(\psi_j(v''_j, v'_{-j}); v_j) &= -v_j(W) + v''_j(W) - \frac{w_j}{W} v''_j(W) \\ &> -v_j(W) + v'_j(W) - \frac{w_j}{W} v'_j(W) \\ &= U(\psi_j(v'); v_j) \end{aligned}$$

が成り立つ．これは $v' \in N(\psi, v)$ に矛盾する．　□

補題 3. 受け入れ地域 j について

$$v'_j(W) \geq v_j(W)$$

が成り立つ．

証明. 背理法により $v_j(W) > v'_j(W)$ を仮定し矛盾を導く．このとき

$$v_j(W) > v''_j(W) > v'_j(W)$$

を満たす $v''_j \in V_j$ が存在する．補題 2 より，ある $k \neq j$ が存在して $v'_j(W) = v'_k(W)$ なので，j が v'_j でなく v''_j を申告すると効用は

$$U(\psi_j(v''_j, v'_{-j}); v_j) = -\frac{w_j}{W} v'_k(W) = -\frac{w_j}{W} v'_j(W)$$

となる．

ここで

$$U(\psi_j(v'); v_j) = -v_j(W) + v'_j(W) - \frac{w_j}{W} v'_j(W) < -\frac{w_j}{W} v'_j(W)$$

に注意すると

$$U(\psi_j(v''_j, v'_{-j}); v_j) > U(\psi_j(v'); v_j)$$

が成り立ち，$v' \in N(\psi, v)$ に矛盾する．　□

補題 4. 各 $i \in I$ について

$$U(\psi_i(v'); v_i) \geq -\frac{w_i}{W} v_i(W)$$

が成り立つ.

証明. 補題 3 より $v'_j(W) - v_j(W) \geq 0$ が成り立つため

$$\begin{aligned} U(\psi_j(v'); v_j) &= -v_j(W) + v'_j(W) - \frac{w_j}{W} v'_j(W) \\ &= -\frac{w_j}{W} v_j(W) + (v'_j(W) - v_j(W))(1 - \frac{w_j}{W}) \\ &\geq -\frac{w_j}{W} v_j(W) \end{aligned}$$

が従う．背理法によって矛盾を導くため，ある $i \neq j$ が存在して

$$-\frac{w_i}{W} v'_j(W) = U(\psi_i(v'); v_i) < -\frac{w_i}{W} v_i(W)$$

だとする．つまり $v'_j(W) > v_i(W)$ である．この i が正直に $v_i \neq v'_i$ を申告すると，i が受け入れ地域になるので

$$U(\psi_i(v_i, v'_{-i}); v_i) = -\frac{w_i}{W} v_i(W) > -\frac{w_i}{W} v'_i(W) = U(\psi_i(v'); v_i)$$

が成り立ち，$v' \in N(\psi, v)$ に矛盾する. □

補題 5. $v_j(W) = v_n(W)$ と，各 $i \in I$ について

$$U(\psi_i(v'); v_i) \geq -\frac{w_i}{W} v_{n-1}(W)$$

が成り立つ.

証明．補題 4 より

$$U_{n-1}(\psi_{n-1}(v');v_{n-1}) \geq -\frac{w_{n-1}}{W}v_{n-1}(W) \tag{3.10}$$

$$U_n(\psi_n(v');v_n) \geq -\frac{w_n}{W}v_n(W) \tag{3.11}$$

が成り立つ．

ケース 1（$\boldsymbol{n = j}$）このとき $v_j(W) = v_n(W)$ は直ちに成り立つ．そして j は受け入れ地域なので，(3.10) より

$$-\frac{w_{n-1}}{W}v'_j(W) = U(\psi_{n-1}(v');v_{n-1}) \geq -\frac{w_{n-1}}{W}v_{n-1}(W)$$

が従う．よって

$$v'_j(W) \leq v_{n-1}(W)$$

が得られるので，$v_1(W) \geq v_2(W) \geq \cdots \geq v_{n-1}(W)$ に注意すると，各 $i \neq j$ について

$$U(\psi_i(v');v_i) = -\frac{w_i}{W}v'_j(W) \geq -\frac{w_i}{W}v_{n-1}(W) \tag{3.12}$$

が成り立つ．また補題 3 と 4 より

$$\begin{aligned}
U_j(\psi_j(v');v_j) &= -v_j(W) + v'_j(W) - \frac{w_j}{W}v'_j(W) \\
&\geq -\frac{w_j}{W}v'_j(W) \\
&\geq -\frac{w_j}{W}v_j(W) \\
&= -\frac{w_n}{W}v_n(W) \\
&\geq -\frac{w_n}{W}v_{n-1}(W)
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって題意が示せた．

ケース2（$\boldsymbol{n \neq j}$） このとき(3.11)から

$$-\frac{w_n}{W}v'_j(W) = U_n(\psi_n(v'); v_n) \geq -\frac{w_n}{W}v_n(W)$$

が成り立ち，$v'_j(W) \leq v_n(W)$ が従う．そして $v_n(W)$ の定義から $v_n(W) \leq v_j(W)$，補題3から $v_j(W) \leq v'_j(W)$ が従うため

$$v_j(W) = v'_j(W) = v_n(W)$$

が成り立つ．よって全ての $i \in I$ について

$$U(\psi_i(v); v_i) = -w_i\frac{v_j(W)}{W} \geq -w_i\frac{v_{n-1}(W)}{W}$$

が成り立つ． □

これまでの結果を用いて定理7の(i)と(ii)を示していく．

***(i)* の証明**. 補題5より

$$-w_i\frac{v'_j(W)}{W} \geq -w_i\frac{v_{n-1}(W)}{W} \quad \forall i \in I$$

なので，$p(\cdot)$ の定義より

$$p(v') \leq \frac{v_{n-1}(W)}{W}$$

である．更に補題3と5から

$$v'_j(W) \geq v_j(W) = v_n(W)$$

が成り立つゆえ，両辺を W で割り

$$p(v') = \frac{v'_j(W)}{W} \geq \frac{v_n(W)}{W} = p(v)$$

が得られる． □

***(ii)* の証明**. どのような $S \subseteq I$ も配分 $\psi(v')$ をブロックできないことを示していこう．補題 5 は $\psi(v') \in P(v)$ を含意するため，$S \subsetneq I$ のケースについて考えれば十分である．いま $k \in \arg\min_{i \in S} v_i(W_S)$ とする．

ケース 1（$\boldsymbol{j \in S}$） 公正価格ルールの定義より

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in S} U(\psi_i(v'); v_i) &= \sum_{i \in S \setminus \{j\}} U(\psi_i(v'); v_i) + U(\psi_j(v'); v_j) \\
&= -\sum_{i \in S \setminus \{j\}} w_i \frac{v'_j(W)}{W} - v_j(W) + v'_j(W) - w_j \frac{v'_j(W)}{W} \\
&= -W_S \frac{v'_j(W)}{W} - v_j(W) + v'_j(W)
\end{aligned}$$

が得られる．補題 3 より $v'_j(W) \geq v_j(W)$ が成り立つゆえ

$$\sum_{i \in S} U_i(\psi_i(v'); v_i) \geq -W_S \frac{v_j(W)}{W}$$

が従う．ここで S が逸脱して得られる最大の効用和は

$$-\min_{i \in S} v_i(W_S) = -v_k(W_S)$$

である．また v_k の強凹性から

$$-W_S \frac{v_k(W)}{W} > -v_k(W_S) \tag{3.13}$$

が得られる．補題 5 より $v_k(W) \geq v_j(W) = v_n(W)$ が成り立つので，(3.13) と合わせると

$$\sum_{i \in S} U_i(\psi_i(v'); v_i) \geq -W_S \frac{v_j(W)}{W} \geq -W_S \frac{v_k(W)}{W} > -\min_{i \in S} v_i(W_S)$$

が得られる．よって S は $\psi(v')$ をブロックしない．

ケース 2（$\boldsymbol{j \notin S}$） ここで S が逸脱して得られる最大の効用和は

$$-\min_{i \in S} v_i(W_S) = -v_k(W_S)$$

である．補題 5 より

$$\sum_{i \in S} U_i(\psi_i(v'); v_i) \geq -W_S \frac{v_{n-1}(W)}{W} \tag{3.14}$$

が成り立つ．いま $j \notin S$ なので，$v_{n-1}(W) \leq v_k(W)$ が成り立ち，

$$\frac{v_{n-1}(W)}{W} \leq \frac{v_k(W)}{W}$$

が従う．また，v_k の強凹性から

$$\frac{v_k(W)}{W} < \frac{v_k(W_S)}{W_S}$$

が成り立つ．よって

$$\frac{v_{n-1}(W)}{W} < \frac{v_k(W_S)}{W_S}$$

である．この不等式と (3.14) より

$$\sum_{i \in S} U_i(\psi_i(v'); v_i) \geq -W_S \frac{v_{n-1}(W)}{W} > -v_k(W_S) = -\min_{i \in S} v_i(W_S)$$

が成り立つ．よって S は $\psi(v')$ をブロックしない．　□

3.6 おわりに

ごみ処分場立地問題では予算バランス条件を尊重することが自然だが，グローヴスメカニズムはこの条件を満たさない．それゆえ別の方策として公正価格ルールを導入しその性質を調べてきた．このルールは耐戦略性を満たさずそれゆえ戦略的操作の影響を受けるが，その影響は軽微であり，操作されたところでコア配分を正しく選び取ることができる．戦略的操作による歪みが非常に少ないわけだ．これは耐戦略性を追求する VCG タイプのメカニズムデザインとは異なる，一定の戦略的操作を許容してデザインを行うアプローチだと言える．

第4章　公平分担問題とナッシュ遂行

4.1　はじめに

前章では，ごみ処分場の受け入れ地域と，排出量に応じた受け入れ地域への金銭補償をどうするかという問題を考察した．そこで私たちは公正価格ルールを提案し，それが戦略的に操作されてもナッシュ均衡においてはコアという優れた配分が実現することを見てきた．

本章ではこの発想を更に進め，いっそ人々にナッシュ均衡をプレイさせて，そのもとで優れた配分を実現することを考える．こうした制度設計のアプローチを**ナッシュ遂行**という[1]．本章ではこのアプローチの具体例として，複数いる個人のうちひとりだけが財を受け取り，彼らの中で金銭補償を行って公平な資源配分を実現する問題を考える．これを公平分担問題という[2]．

[1] レオニド・ハーヴィッツやエリック・マスキンらにより推し進められてきた．初期の代表的な研究に Hurwicz (1977) と Maskin (1977, 1999) が，サーヴェイに Jackson (2001) がある．

[2] この研究の嚆矢は Tadenuma and Thomson (1993, 1995) である．サーヴェイに坂井 (2009) が，非分割財市場との関連において紹介した文献に河田・坂井 (2013) がある．

4.2　公平分担問題

等しい立場にある個人の集合を $I \equiv \{1, 2, \ldots, n\}$ で表す．個人 $i \in I$ について，$a_i = 1$ により財を受け取り，$a_i = 0$ により受け取らないことを表す．

割り当てベクトルとは「財の受け手はただひとり」であることを意味する条件

$$\sum_{i \in I} a_i = 1$$

を満たすベクトル

$$a \equiv (a_i)_{i \in I} \in \{0, 1\}^I$$

のことである．割り当てベクトルの集合を A で表す．

金銭移転ベクトルとは予算バランス条件

$$\sum_{i \in I} t_i = 0 \tag{4.1}$$

を満たすベクトル

$$t \equiv (t_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$$

のことである．金銭移転ベクトルの集合を T で表す．各 t_i は i のネットの金銭移転額を意味する．

配分とは割り当てベクトルと金銭移転ベクトルのペア

$$x \equiv (a, t) \in X \equiv A \times T$$

のことである．また $x_i \equiv (a_i, t_i)$ と表す．

各 $i \in I$ は財に対し**評価値**$v_i \in V_i \equiv \mathbb{R}$ を持ち，選好は

$$U(a_i, t_i; v_i) = v_i \cdot a_i + t_i$$

なる準線形関数 $U(\,\cdot\,,\,\cdot\,; v_i) : \{0,1\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ により表現される．

評価値ベクトル $v \in V \equiv \times_{i \in I} V_i$ のもとで，配分 $x = (a, t) \in X$ が**効率的**であるとは，$a_j = 1$ なる $j \in I$ について

$$v_j = \max_{i \in I} v_i$$

が成り立つ，つまり評価値が最も高い者に財が割り当てられることである．そうした配分全てからなる集合を $P(v)$ で表す．

自分の結果を他人の結果以上に良いと誰もが思える配分を**無羨望**だという (Foley 1967)．すなわち評価値ベクトル $v \in V$ のもとで配分 $x \in X$ が無羨望であるとは

$$U(x_i; v_i) \geq U(x_j; v_i) \quad \forall i, j \in I$$

が成り立つことである．無羨望配分の集合を $E(v)$ で表す．

公平分担問題においては無羨望性が効率性より強いことが Svensson (1983) 以来知られている．つまり無羨望性は公平性に関する概念であるのみならず効率性の精緻化にもなっている．

命題 3. 任意の $v \in V$ について，$E(v) \subseteq P(v)$．

証明. いま $x = (a_i, t_i)_{i \in I} \in E(v)$ について考える．そして $j \in I$ を $a_j = 1$ なる個人とする．任意の $i \neq j$ について，j の i への無羨望から

$$v_j + t_j \geq t_i$$

が，また i の j への無羨望から

$$t_i \geq v_i + t_j$$

が成り立つ．これらを整理すると $v_j = \max_{i \in I} v_i$ が得られる．　□

次の命題は Tadenuma and Thomson (1993) により示された結果で，公平分担問題における無羨望配分の特徴付けを与え，またその存在を常に保証するものだ．

命題 4. 任意の $v \in V$ について，$x = (a, t) \in E(v)$ であることと，$a_j = 1$ なる $j \in I$ について条件群

$$v_j = \max_{i \in I} v_i \tag{4.2}$$

$$t_i = -\frac{1}{n-1} t_j \quad \forall i \neq j \tag{4.3}$$

$$-\frac{n-1}{n} v_j \leq t_j \leq -\frac{n-1}{n} \max_{i \neq j} v_i \tag{4.4}$$

が成り立つことは同値である．

証明. 無羨望配分 $x = (a_i, t_i)_{i \in I} \in E(v)$ が諸条件を満たすことのみを示す．逆については同様に示せる．いま $j \in I$ を $a_j = 1$ なる個人とする．命題 3 より x は (4.2) を満たす．個人 j 以外の者たちの間の無羨望と予算バランスから，(4.3) が成り立つ．

残すは (4.4) である．(4.3) に注意して無羨望を用いると

$$v_j + t_j \geq -\frac{1}{n-1} t_j$$

$$-\frac{1}{n-1} t_j \geq \max_{i \neq j} v_i + t_j$$

が得られ，これらをそれぞれ変形すると

$$-\frac{n-1}{n}v_j \leq t_j$$
$$t_j \leq -\frac{n-1}{n}\max_{i \neq j} v_i$$

が得られる．よって (4.4) が成り立つ． □

4.3 ナッシュ遂行メカニズム

本章のモデルは第 1–2 章で扱ったモデルの特殊ケースである．よって定理 4 から，効率性と耐戦略性を満たすメカニズムが存在するならば，それは必ずグローヴスメカニズムである．しかし定理 3 と同様の不可能性定理が成り立ち，どのグローヴスメカニズムも予算バランスを満たさない[3]．そして公平分担問題では予算バランス条件 (4.1) が最初からモデルに組み込まれている．つまり効率性と耐戦略性を満たすメカニズムは存在しない．

そこで Fujinaka and Sakai (2008) と坂井・藤中・若山 (2008) に従い次のようなゲームのルール「旗付きメカニズム」の一種を考える[4]．

- 各個人 $i \in I$ が取りうる戦略の集合を

$$M_i \equiv \mathbb{R} \times \{\text{いる}, \text{いらない}\} \quad \forall i \in I$$

[3]実際，定理 3 の証明は本章のモデルに直接適用できるよう書かれている．

[4]彼らはより広いクラスのゲームのルールを扱っている．ここで扱うルールはその中で最もシンプルなものだ．このルールのアイデアは Tadenuma and Thomson (1995) による研究を発端としている．

とし，各戦略を $m_i = (b_i, r_i) \in M_i$ で表す．$M \equiv \times_{i \in I} M_i$ と定める．

- 帰結関数 $g : M \to X$ を以下により定める．

財を得る者 最も大きな b_i を表明している個人が財を得る．そうした個人が複数存在する場合には，その中で「いる」を表明している個人が得る．更にそうした個人が複数存在する場合には，その中で名前の数字が最も若い者が得る．例えば $n = 4$ のとき「$b_1 < b_2 = b_3 = b_4$，$r_2 = r_4 =$ いる，$r_3=$ いらない」ならば，個人 2 が得ることになる．最も大きな b_i を表明している個人が複数存在し，かつ彼らが皆「いらない」の場合には，その中で名前の数字が最も若い者が得る．

金銭移転 上で定められた方法で財を得る個人が j のとき

$$t_j = -\frac{n-1}{n} b_j$$
$$t_i = \frac{1}{n} b_j \quad \forall i \neq j$$

とする．つまり j は申告額の $\frac{n-1}{n}$ パーセント分を支払い，他の者たちはそれを均等に分けて受け取る．

このルールのもとで，真の評価値ベクトルが $v \in V$ のときの**ナッシュ均衡**の集合を

$$N(v) = \{m \in M : U(g_i(m); v_i) \geq U(g_i(m_i', m_{-i}); v_i) \quad \forall i \in I, \forall m_i' \in M_i\}$$

で表す．この集合はメカニズムのもとで人々が取るであろう行動の集合を表すものだ．するとナッシュ均衡により実現する配分の集合は

$$g(N(v)) = \{x \in X : \exists m \in N(v),\ g(m) = x\}$$

で与えられる．

ここで以下の一致が成り立つ．

定理 8. 任意の $v \in V$ について

$$E(v) = g(N(v))$$

が成り立つ．

つまりナッシュ均衡という戦略的行動を通じて実現する配分の集合は無羨望配分の集合と完全に一致する．

証明．ここでは $I = \{1, 2\}$ のケースで証明を行う．しかしこの証明を一般の n 人ケースへ拡張するのは容易である．$v \in V$ を真の評価値ベクトルとして固定する．

ステップ 1 $\boldsymbol{E(v) \subseteq g(N(v))}$ 任意の $x = (a_i, t_i)_{i \in I} \in E(v)$ について考える．この証明では $a_1 = 1$ のケースのみを扱うが，$a_2 = 1$ のケースも全く同様に示せる．いま無羨望より

$$v_1 + t_1 \geq t_2 \tag{4.5}$$
$$t_2 \geq v_2 + t_1 \tag{4.6}$$

が成り立つ．

そこで $m \in M$ を

$$
\begin{aligned}
b_1 = b_2 &\equiv 2t_2 \\
r_1 &\equiv \text{いる} \\
r_2 &\equiv \text{いらない}
\end{aligned}
$$

により定める．帰結関数 g の定義より $g(m) = x$ は明らか．

これから $m \in N(v)$ を示していこう．

- まず個人 1 の任意の戦略 $m_1' = (b_1', r_1') \neq m_1$ について考える．いま m_2 を所与として，m_1 から m_1' に戦略を変えたとき財を受け取るためには $b_1' \geq b_1$ でなければならず，このとき個人 2 への支払いが増えるだけである．一方，財を受け取らなくなるなら t_2 を得ることになるが，(4.5) より個人 1 はそれを望まない．

- 次に個人 2 の任意の戦略 $m_2' = (b_2', r_2') \neq m_2$ について考える．いま m_1 を所与として，m_2 から m_2' に戦略を変えたとき財を受け取らないならば，結果が何も変わっていない．一方，財を受け取るようになるならば，$b_2' \geq 2t_2$ でなければならず，そのとき金銭移転が $-\dfrac{1}{2}b_2'$ であり，$-\dfrac{1}{2}b_2' \leq -t_2 = t_1$ が成り立つ．これが得にならないのは (4.6) より明らか．

よって $m \in N(v)$ が成り立つ．

ステップ 2　$\boldsymbol{E(v) \supseteq g(N(v))}$　任意の $x = (a, t) \in g(N(v))$ について考える．$m = ((b_1, r_1), (b_2, r_2)) \in N(v)$ を，$g(m) = x$ を満たすナッシュ均衡とする．

各 $i \in I$ について，b_i を正直申告 v_i に変えたとき，g の定義より

$$U(g_i((v_i, r_i), m_{-i}); v_i) \geq \frac{1}{2}v_i$$

なので，ナッシュ均衡の定義より

$$U(g_i(m); v_i) \geq \frac{1}{2}v_i \tag{4.7}$$

が成り立つ．場合分けをしていこう．

- $v_1 > v_2$ のケースを考える．(4.7) より

  $$U(g_1(m); v_1) + U(g_2(m); v_2) > v_2$$

  が成り立つので $a_1 = 1$ が従う．また，このとき (4.7) より

  $$t_1 \geq -\frac{1}{2}v_1$$
  $$t_2 \geq \frac{1}{2}v_2$$

  が成り立ち，予算バランスから得られる $t_1 = -t_2$ に注意すると，命題 4 より $x \in E(v)$ が従う．

- $v_1 < v_2$ のケースは上のケースと同様に示せる．

- $v_1 = v_2$ のケースを考える．いま j を $a_j = 1$ なる個人とし，$i \neq j$ とする．このとき (4.7) から

  $$t_j \geq -\frac{1}{2}v_j$$
  $$t_i \geq \frac{1}{2}v_i$$

が成り立つ．予算バランスから $t_j = -t_i$ が成り立つことに注意すると

$$-t_j = t_i = \frac{1}{2}v_j = \frac{1}{2}v_i$$

が得られる．よって命題 4 から $x \in E(v)$ が従う．

以上の議論より $E(v) = g(N(v))$ が成り立つことが分かった．　□

4.4　おわりに

公平分担問題では予算バランスを満たしたうえで無羨望な配分を実現することが自然な目標となる．しかしどのグローヴスメカニズムも予算バランスを満たさない．そこで本章では「人々がナッシュ均衡をプレイした結果として得られる配分の集合が，無羨望配分の集合と一致する」ようなゲームのルールを設計した．これがナッシュ遂行と呼ばれるメカニズムデザインのアプローチである．大雑把な言い方だが，正直申告を追求する VCG タイプのメカニズムデザインと比べると，ナッシュ遂行のほうが複雑なルールを設計しやすく自由度が高い．しかしその分，当該分野でこれまで作られたナッシュ遂行メカニズムは複雑でプレイが難しいものが多い．本章で紹介したメカニズムはかなり例外的にシンプルなものである．

あとがき

本書では一貫して準線形環境を扱ってきた．しかし 1980 年代に非分割財市場の理論が発展して以降，特に近年では選好の準線形性を落とす試みがメカニズムデザインでもなされている．これについては河田・坂井 (2013) がコンパクトな紹介を与えている．準線形環境を含むメカニズムデザインの上級者向けテキストには坂井・藤中・若山 (2008) がある．マーケットデザインの入門用テキストには坂井 (2010) があるが，これはメカニズムデザインの入門にも適している．こうした分野を新書で読んでみたい人には坂井 (2013) を薦める．拙稿の紹介ばかりで恐縮だが，自分の関わる学問分野を日本語で学べる環境を整えることは，私がキャリアの初期段階から目指してきたことであり，本書も加えてそれが一定の蓄積に達したことを嬉しく思う．

執筆過程においては多くの人々のお世話になった．三菱経済研究所の常務理事を務める青木透氏には，本書についての定期的な打ち合わせを行っていただき，さまざまな助言のみならず温かい励ましをいただいた．慶應義塾大学経済学部の大山道廣名誉教授と丸山徹教授は同研究所との縁を取り持って下さった．研究室の大学院生である岡本実哲君と野口裕貴君は高質の補助作業をしてくれた．本書の草稿の一部は学部の授業で教材として用いたが，その際には塾生諸君から多くの

助言を受けた．以上の方々に深く感謝申し上げる．

2013 年 8 月

坂井豊貴

引用文献

河田陽向・坂井豊貴（2013）「非分割財市場の理論」船木由喜彦・石川竜一郎（編）『制度と認識の経済学』NTT 出版

坂井豊貴（2008）「ごみ処分場立地問題の公理的分析」三田学会雑誌, Vol.100-4, pp. 941–949.

坂井豊貴（2009）「公平分担問題における社会的選択，メカニズムデザイン，経済実験」，池田新介・市村英彦・伊藤秀史（編）『現代経済学の潮流 2009』に所収，東洋経済新報社

坂井豊貴 (2010)『マーケットデザイン入門 –オークションとマッチングの経済学』ミネルヴァ書房

坂井豊貴 (2013)『マーケットデザイン –最先端の実用的な経済学』ちくま新書

坂井豊貴・藤中裕二・若山琢磨 (2008)『メカニズムデザイン –資源配分制度の設計とインセンティブ』ミネルヴァ書房

Clarke, E. (1971) “Multi-part Pricing of Public Goods,” *Public Choice*, Vol. 11, pp. 17–33.

Fujinaka, Y. and Sakai, T. (2008) “Manipulation Games and the Games of Fair Division,” mimeo.

Green, J. and Laffont, J.-J. (1977) "Characterization of Satisfactory Mechanisms for the Revelation of Preferences for Public Goods," *Econometrica*, Vol. 45, pp. 727–738.

Green, J. and Laffont, J.-J. (1979) *Incentives in Public Decision Making*, North-Holland.

Groves, T. (1973) "Incentives in Teams," *Econometrica*, Vol. 41, pp. 617–631.

Groves, T. and Loeb, M. (1975) "Incentives and Public Inputs," *Journal of Public Economics*, Vol. 4, pp. 211–226.

Holmström, B. (1979) "Groves' Scheme on Restricted Domains," *Econometrica*, Vol. 47, pp. 1137–1144.

Hurwicz, L. (1977) "On Informationally Decentralized Systems," in *Studies in Resource Allocation Processes*, edited by Arrow, K. J. and Hurwicz, L., Cambridge University Press.

Jackson, M. O. (2000) "Mechanism Theory," in *Optimization and Operations Research*, edited by Derigs, U. in the *Encyclopedia of Life Support Systems*, EOLSS Publishers.

Jackson, M. O. (2001) "A Crash Course in Implementation Theory," *Social Choice and Welfare*, Vol. 18, pp. 655–708.

Maskin, E. (1977, 1999) "Nash Equilibrium and Welfare Optimality," MIT working paper/ *Review of Economic Studies*, Vol. 66, pp. 23–38.

Moulin, H. (1986) "Characterizations of the Pivotal Mechanism," *Journal of Public Economics*, Vol. 31, pp. 53–78.

Royden, H. and Fitzpatrick, P. (2010) *Real Analysis* (4th Edition), Pearson.

Sakai, T. (2012) "Fair Waste Pricing: an Axiomatic Analysis to the NIMBY Problem," *Economic Theory*, Vol. 50, pp. 499–521.

Svensson, L.-G. (1983) "Large Indivisibilities: An Analysis with Respect to Price Equilibrium and Fairness," *Econometrica*, Vol. 51, pp. 939–954.

Suijs, J. (1996) "On Incentive Compatibility and Budget Balancedness in Public Decision Making," *Review of Economic Design*, Vol. 2, pp. 193–209.

Tadenuma, K. and Thomson, W. (1993) "The Fair Allocation of an Indivisible Good when Monetary Compensations are Possible," *Mathematical Social Sciences*, Vol. 25, pp. 117–132.

Tadenuma, K. and Thomson, W. (1995) "Games of Fair Division," *Games and Economic Behavior*, Vol. 9, pp. 191–204.

Vickrey, W. (1961) "Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders," *Journal of Finance*, Vol. 16, pp. 8–37.

索引

あ行

オークション（auction）

か行

決定関数（decision function）
金銭移転関数（monetary transfer function）
金銭移転ベクトル（monetary transfer vector）
組み合わせオークション（combinatorial auction）
クラークメカニズム（Clarke mechanism）
グローヴスメカニズム（Groves mechanism）
コア選択的（core selecting）
コア配分（core allocation）
公共財供給（public good provision）
公正価格（fair price）
公正価格ルール（fair price rule）
厚生下限性（welfare lower bound）
効率的（efficient）
ごみ処分場立地問題（NIMBY problem）

さ行

戦略的操作（strategic manipulation）

た行

耐戦略性（strategy-proofness）
第二価格オークション（second price auction）
単一財オークション（single item auction）
直接表明ゲーム（direct revelation game, manipulation game）
凸性（convexity）
ドメイン（domain）

な行

ナッシュ均衡（Nash equilibrium）
ナッシュ遂行（Nash implementation）
二択の選択（binary choice）

は行

配分（allocation）
パレート効率的（Pareto efficient）
ピボタルメカニズム（pivotal mechanism）
評価関数（valuation function）
評価値（valuation）
VCG オークション（VCG auction）
不効用関数（disutility function）
ブロック（block）
ホルムストローム（Holmström）

ま行

無羨望（no-envy, envy-free）
メカニズム（mechanism）

や行

予算実効可能性（budget feasibility）
予算バランス（budget balance）

ら行

リプシッツ連続性（Lipschitz continuity）
ルール（rule）

わ行

割り当て関数（assignment function）